

Hybride Regelsysteme

Jörg Raisch

Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme

Leipziger Str. 44

D-39120 Magdeburg

email: raisch@mpi-magdeburg.mpg.de

<http://www.mpi-magdeburg.mpg.de/people/raisch>

Forschungsberichte aus dem Max-Planck-Institut
für Dynamik komplexer technischer Systeme

Band 1

Jörg Raisch

Hybride Regelsysteme

Shaker Verlag
Aachen 1999

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Raisch, Jörg:

Hybride Regelsysteme / Jörg Raisch. - Als Ms. gedr. -

Aachen : Shaker, 1999

(Forschungsberichte aus dem Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme ; Bd. 1)

Zugl.: Stuttgart, Univ., Habil.-Schr., 1998

ISBN 3-8265-6773-0

Copyright Shaker Verlag 1999

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISBN 3-8265-6773-0

ISSN 1439-4804

Shaker Verlag GmbH • Postfach 1290 • 52013 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommersemester 1997 als Habilitationsschrift an der Fakultät für Verfahrenstechnik und Technische Kybernetik der Universität Stuttgart eingereicht. Sie wurde ohne Änderungen angenommen. Die Habilitation erfolgte am 11. Dezember 1998.

'I remember well', he said, 'a dream that I had six years ago on the twenty-third of November next. A nightmare would be a truer word. I dreamt if you please that I had a slow puncture.'

– Flann O'Brien: The Third Policeman

Vorwort

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit *hybriden Regelsystemen*. Hierunter versteht man Regelkreise, die durch das Zusammenwirken von kontinuierlichen und ereignisdiskreten dynamischen Komponenten gekennzeichnet sind.

Kontinuierliche Systeme beschreiben den Zusammenhang zwischen Signalen mit *kontinuierlichem Wertebereich*. Zu dieser Klasse von Signalen gehören beispielsweise Temperaturen, Spannungsverläufe und Ströme. Das Zeitraster, auf dem die Signale betrachtet werden, spielt demgegenüber eine untergeordnete Rolle: Die unabhängige Variable Zeit kann kontinuierlich *oder* diskret sein; im ersten Fall wird das kontinuierliche System i. a. durch gewöhnliche Differentialgleichungen, im zweiten Fall durch Differenzgleichungen beschrieben. Für beide Varianten existiert ein umfangreiches Repertoire regelungstechnischer Analyse- und Synthesemethoden.

Ereignisdiskrete Systeme befassen sich demgegenüber mit Zusammenhängen, die durch *wertediskrete* Signale adäquat charakterisiert werden können. Verkehrsampeln stellen ein alltägliches Beispiel für diese Signalklasse dar – in diesem Fall kann das Signal drei diskrete Werte („rot“, „gelb“, „grün“) annehmen. Anders als bei kontinuierlichen Systemen konkurrieren im Bereich der ereignisdiskreten Systeme mehrere Beschreibungsmöglichkeiten – ein universell akzeptiertes Analyse- oder Syntheseverfahren existiert deshalb bisher nicht. Trotzdem lassen sich auch ereignisdiskrete Regelungsproble-

me systematisch behandeln: Dies ist in erster Linie einer Mitte der achtziger Jahre von *W. M. Wonham* und *P. J. Ramadge* initiierten Theorie zu verdanken, die sich formaler Sprachen und Automaten als Modellierungswerkzeug bedient. Sie hat wesentlich dazu beigetragen, ereignisdiskrete Systeme als eines der zentralen Gebiete der modernen Regelungstechnik zu etablieren.

Weitaus unbefriedigender stellt sich der Sachverhalt dar, wenn kontinuierliche und ereignisdiskrete Systeme zusammenwirken: Obwohl sich hybride Systeme in letzter Zeit verstärkter Aufmerksamkeit im Grenzgebiet zwischen Informatik und Regelungstechnik erfreuen, steckt die Untersuchung solcher Systeme noch in ihren Anfängen. Das zunehmende Interesse an hybriden Systemen wird durch eine Reihe von ausschließlich diesem Thema gewidmeten Workshops in den USA (Cornell University 1994 und 1996, MIT 1993, Rutgers University 1995, University of Notre Dame 1997) und in Europa (Lyngby 1992, Grenoble 1995) dokumentiert. Die diesem Thema zugewiesene Wichtigkeit zeigt sich auch an der Einrichtung des Schwerpunktprogramms KONDISK („Analyse und Synthese kontinuierlich-diskreter technischer Systeme“) der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Jahre 1995. In Anbetracht der Vielzahl potentieller Anwendungsbereiche – hybride Probleme finden sich u.a. in der Verfahrenstechnik, der Fertigungstechnik und der Verkehrs(leit)technik – mag die Tatsache erstaunen, daß hybride Regelsysteme erst seit vergleichsweise kurzer Zeit „en vogue“ sind. Als Grund läßt sich anführen, daß eine erfolversprechende Beschäftigung mit diesem Thema die Existenz methodisch weitgehend ausgereifter Instrumentarien sowohl für rein kontinuierliche als auch für rein ereignisdiskrete Systeme voraussetzt. Für ereignisdiskrete Systeme kann diese Bedingung erst seit wenigen Jahren als erfüllt gelten.

Bei einem derart breit gefaßten Thema lassen sich – zum Wohle von Verfasser und Leser(inne)n – thematische Beschränkungen nicht vermeiden: Im folgenden wird deshalb *nicht* der Versuch unternommen, alle in der Fachliteratur momentan verfolgten Ansätze detailliert zu beschreiben. Vielmehr werden nur solche Ansätze vorgestellt, an deren Entwicklung der Verfasser zumindest beteiligt war. Da diese Ansätze verschiedene Aspekte der Problemstellung beleuchten, bleibt eine gewisse „Breite“ trotzdem gewahrt. Weiterhin beschränke ich mich darauf, die Grundgedanken und die zu ihrem Verständnis notwendigen Hintergründe auf (hoffentlich) leicht verständliche Weise zu erklären. Aus diesem Grund finden sich auf den folgenden Seiten eine Vielzahl von Beispielen, deren Hauptanliegen es ist, theoretische Überlegungen zu illustrieren. Dieser Rolle können nur einfache, überschaubare

Beispiele gerecht werden – technische Anwendungen, die über die Größe eines Praktikumsversuch hinausgehen, werden deswegen ausgespart. Zu einer ökonomischen Darstellung trägt auch die gewählte „reduktionistische“ Vorgehensweise bei: Die betrachteten Fragestellungen werden in Teilprobleme aufgespalten; Teilprobleme mit bislang unbekannter Lösung werden ausführlich erörtert; auf Teilprobleme mit aus der Literatur bekannten Lösungen wird hingegen i.a. nicht näher eingegangen. Ausnahmen von dieser Regel sind die „behaviouristische“ Systemtheorie von *J. C. Willems* und die Theorie mengendynamischer Systeme. Insbesondere von ersterer wird im folgenden oft Gebrauch gemacht; sie wird deswegen in Abschnitt 2.2 dargestellt. Abschnitt 2.2 läßt sich unabhängig vom Rest dieser Arbeit lesen und kann deshalb als eigenständiges kurzes „Tutorial“ dieser neuen Sichtweise der Regelungstechnik interpretiert werden. In Kapitel 1 werden hybride Regelsysteme eingeführt; dort wird auch diskutiert, in welchen Situationen hybride Probleme auftreten können. Es wird sich zeigen, daß sich – je nach Fragestellung – zwei komplementäre Vorgehensweisen zur Problemlösung anbieten: Einer der beiden Lösungsansätze basiert auf den Methoden der „klassischen“ kontinuierlichen Regelungstheorie – er wird in Kapitel 3 erläutert. Die komplementäre Vorgehensweise wird in Kapitel 2 behandelt. Sie beruht auf einer verallgemeinernden Auslegung des Begriffs der Modellreduktion – kontinuierliche bzw. hybride Systeme werden durch Automaten approximiert, das resultierende rein diskrete Problem kann dann mit Methoden der ereignisdiskreten Regelungstheorie angegangen werden. Der Approximationsschritt kann natürlich nicht völlig vom ereignisdiskreten Reglerentwurf gelöst werden: Es wird gezeigt, welchen Bedingungen er genügen muß, um die Einhaltung vorgegebener Spezifikationen für den hybriden Regelkreis garantieren zu können. Die Darstellung beider Ansätze hängt nicht voneinander ab – die gewählte Reihenfolge ist deshalb willkürlich. Leser(innen), die sich nur für die klassische Sichtweise interessieren, können von Kapitel 1 direkt zur Lektüre von Kapitel 3 übergehen. Ein kurzer zusammenfassender Vergleich beider Strategien findet sich schließlich in Kapitel 4.

Die Absicht, Ansätze zur Behandlung hybrider Regelprobleme auf verständliche Weise zu erklären, wirkt sich auch auf die Darstellung aus: Zwar wird der Text – vor allem dort, wo sich eine gewisse Anhäufung formaler Begriffe und Überlegungen nicht vermeiden läßt – mit Hilfe von Definitionen, Sätzen und Beweisen strukturiert; dies soll aber kein hohes Abstraktionsniveau vortäuschen, sondern lediglich als Orientierungshilfe für den Leser bzw. die Leserin dienen: Kernpunkte sind in Form von Definitionen und

Sätzen hervorgehoben; Beweise kann man bei der Lektüre übergehen, ohne deswegen Verständnisprobleme befürchten zu müssen.

Die auf den folgenden Seiten zusammengefaßten Arbeiten wurden 1994 bis 1996 an der Universität Stuttgart und der University of Toronto durchgeführt. Sie wurden durch ein Habilitandenstipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft ermöglicht. Einige der vorgestellten Ergebnisse wurden auch im Rahmen zweier weiterer von der DFG geförderter Projekte erarbeitet: Ein gemeinsam mit Prof. *Wehlan* im Sonderforschungsbereich 412 durchgeführtes Projekt befaßt sich mit der „Ereignisorientierten Modellierung verfahrenstechnischer Prozesse“; in einem zweiten – im Schwerpunktprogramm KONDISK angesiedelten – Projekt werden „Approximierende Automaten“ untersucht.

Mein Dank gilt Prof. *E. D. Gilles* für seine Unterstützung in Stuttgart, sowie den Professoren *Siu O'Young* und *Bruce Francis* für ihre Gastfreundschaft in Toronto. Viele der vorgestellten Ergebnisse entstammen einer Kooperation mit Prof. *O'Young*, dem ich an dieser Stelle für die gute Zusammenarbeit danken möchte. Ich profitierte von zahlreichen Diskussionen mit Prof. *Jan Lunze* und Dr. *Gerwald Lichtenberg* (Technische Universität Hamburg-Harburg), Dr. *Stefan Kowalewski* (Universität Dortmund), Prof. *Karen Rudie* (Queen's University Kingston), Prof. *José Cury* (Universidade Federal de Santa Caterina), Dr. *Michael Spathopoulos* (University of Strathclyde), *Christian Meder*, *Eberhard Klein* und Dr. *Notker Amann* (Universität Stuttgart). Viele Anregungen erhielt ich auch durch die Vorlesungen Prof. *W. M. Wonhams*, die ich 1992 und 1993 besuchen konnte. Schließlich möchte ich mich bei *Dave*, *Jenny* und *Yvonne* in Toronto, sowie bei allen Freund(inn)en und Kolleg(inn)en in Stuttgart bedanken.

Jörg Raisch
Stuttgart, April 1997

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Einführung	1
1.1 Zwei Seiten einer Medaille	2
1.1.1 Die kontinuierliche Sicht der Dinge	2
1.1.2 Die diskrete Sicht der Dinge	4
1.2 Zusammenfassung	6
1.3 Literaturhinweise	7
2 Diskrete Abstraktion und Regelung hybrider Systeme	9
2.1 Einführung	9
2.2 Das „Verhalten“ dynamischer Systeme – Ein Ausflug in die <i>Willemssche</i> Systemtheorie	11
2.2.1 Modelle	11
2.2.2 Dynamische Modelle	13
2.2.3 Das „Verschalten“ dynamischer Systeme	17
2.2.4 Reglerentwurf	21
2.2.5 Modellreduktion und Regelung	22
2.3 Exakte Modellreduktion	23
2.3.1 Zwei einfache Beispiele	23
2.3.1.1 Beispielsystem „Schaltender Zulauf“	25
2.3.1.2 Beispiel „Schaltender Abfluß“	29
2.3.2 Mengendynamische Systeme	30
2.3.2.1 Algebraische Grundlagen	31
2.3.2.2 Definition mengendynamischer Systeme	34

2.3.2.3	Modellvereinfachung	36
2.4	Diskrete Approximation kontinuierlicher und hybrider Systeme	39
2.4.1	Die Regelstrecke	40
2.4.2	Nichtdeterministische Automaten als diskrete Abstraktionen kontinuierlicher Systeme	41
2.4.2.1	Das Prinzip	41
2.4.2.2	Die numerische Vorgehensweise	47
2.4.3	Diskrete Abstraktionen als Beobachter für den kontinuierlichen Streckenzustand	51
2.4.4	Automaten mit Meß- und Ausgangssymbolen	54
2.4.5	Eine vollständig geordnete Menge diskreter Abstraktionen des kontinuierlichen Streckenanteils	55
2.4.6	Eine vollständig geordnete Menge diskreter Abstraktionen der hybriden Regelstrecke	60
2.5	Reglerentwurf für nichtdeterministische diskrete Systeme	62
2.5.1	Regelungstechnische Ziele	63
2.5.2	Automaten	66
2.5.2.1	Nichtdeterministische endliche Automaten ohne Ausgabe	67
2.5.2.2	Synchrones Produkt zweier Automaten	68
2.5.2.3	Moore-Automaten, Automaten ohne Ausgabe und <code>tick</code> -Automaten	70
2.5.3	Reglersynthese	74
2.5.3.1	Ein <i>sehr</i> einfaches Beispiel	78
2.5.4	Verschaltbarkeit von diskretem Regler und hybridem Streckenmodell	82
2.6	Zusammenfassung	83
2.7	Literaturhinweise	85
3	Die „klassische“ Sichtweise	93
3.1	Einführung	93
3.2	Der Regelkreis	95
3.2.1	Das Streckenmodell	95
3.2.2	Quantisierung, Meß- und Stell-Ereignisse	100
3.2.3	Der Regler	102
3.3	Steuerbarkeit und Erreichbarkeit	102
3.3.1	Ein Spezialfall	103
3.3.2	Der allgemeine Fall	108

3.4	Beobachtbarkeit	110
3.5	„Stabilität“ und Regelung	114
3.5.1	Ein einfacher prädiktiver Regler	115
3.6	Ein sehr einfaches Beispiel	116
3.7	Zusammenfassung	120
3.8	Literaturhinweise	120
4	Schlußbetrachtung	123
	Symbolverzeichnis	127

'You told me what the first rule of wisdom is,' I said. 'What is the second rule?'

'That can be answered,' he said. 'There are five in all. Always ask any questions that are to be asked and never answer any. Turn everything you hear to your own advantage. Always carry a repair outfit. Take left turns as much as possible. Never apply your front brake first.'

'These are interesting rules,' I said dryly.

'If you follow them,' said the Sergeant, 'you will save your soul and you will never get a fall on a slippery road.'

– Flann O'Brien: The Third Policeman

Kapitel 1

Einführung

Unter einem hybriden Regelsystem versteht man einen Regelkreis, in dem kontinuierlich- und diskretwertige Signale zusammenwirken. Obwohl hybride Regelungsprobleme in einer Vielzahl von Anwendungsgebieten auftreten, wurden sie bisher fast ausschließlich mit heuristischen Methoden angegangen. In den folgenden Kapiteln sollen deshalb theoretisch fundierte Analyse- und Syntheseverfahren für hybride Regelsysteme entwickelt werden. Zu Beginn eines systematischen Herangehens an diese Aufgabe muß man fragen, welche Ursachen das Auftreten hybrider Problemstellungen hat und ob verschiedene Ursachen vielleicht zu verschiedenen Interpretationen und eventuell sogar zu verschiedenen Lösungsstrategien führen. Man stellt fest, daß sich tatsächlich zwei Klassen von Ursachen unterscheiden lassen, die eine jeweils andere Sicht

der Dinge nahelegen – die Medaille „hybrides Regelungsproblem“ besitzt zwei Seiten.

1.1 Zwei Seiten einer Medaille

1.1.1 Die kontinuierliche Sicht der Dinge

Auf eine Seite der Medaille blickt man, wenn der diskrete Charakter einiger Systemgrößen eine dem (der) Regelungstechniker(in) aufgezwungene, unerwünschte Eigenschaft darstellt. Dieses Phänomen tritt typischerweise in folgender Situation auf: Man betrachtet eine Strecke mit kontinuierlichem Zustandsraum; zumindest einige der zur Verfügung stehenden Stell- und/oder Meßgrößen sind aber – konstruktionsbedingt – diskretwertig. Als Beispiel für das Wirken von diskretwertigen Stellvariablen kann man das Umschalten zwischen Stoffströmen durch Magnetventile oder das An- und Abschalten von Heiz- oder Kühlvorrichtungen anführen. Beispiele für symbolische Meßgrößen sind u.a. Füllstandsmelder mit zwei- oder dreiwertigem Ausgangssignal. Die betrachtete Situation zeichnet sich weiterhin dadurch aus, daß regelungstechnische Ziele wie gewohnt durch kontinuierliche Spezifikationen ausgedrückt werden: Man möchte beispielsweise erreichen, daß die mittlere Temperaturabweichung von einem beliebig vorgegebenen Sollverlauf möglichst klein wird. Man hat also mit einem „gewöhnlichen“ Regelungsproblem zu tun, das „nur“ dadurch erschwert wird, daß bestimmte Meßsignale sehr „grobe“ Information liefern und einige Stellsignale keinen „feindosierten“ Eingriff in die Strecke zulassen. In einer solchen Situation kann man in aller Regel auch davon ausgehen, daß nur deswegen auf diskretwertige Stell- und Meßsignale zurückgegriffen wird, weil sich die gesteckten Ziele nicht mittels der vorhandenen kontinuierlichen Eingriffs- und Meßvariablen alleine erreichen lassen: Die „Freiheitsgrade“ einer rein kontinuierlichen Rückführung sind also bereits ausgeschöpft – man kann sich die kontinuierliche Rückführung meist als schon entworfen und in die Strecke integriert denken.

Es ergibt sich die in Bild 1.1 gezeigte Problemstellung – die Regelung eines kontinuierlichen Systems über diskretwertige oder symbolische¹ Meß-

¹Die Begriffe „diskretwertig“ und „symbolisch“ werden synonym gebraucht, da man jedem möglichen (numerischen) Wert einer diskreten Variablen auf eindeutige Weise ein nicht-numerisches Symbol zuordnen kann.

und Stellgrößen. In Bild 1.1 werden kontinuierlichwertige Signale als durch-

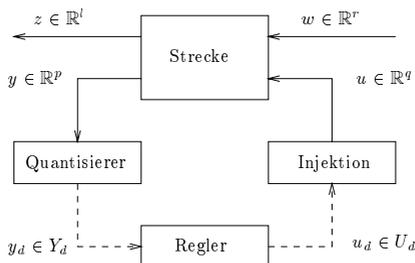


Bild 1.1: Kontinuierliches System mit symbolischen Meß- und Stellgrößen.

gezogene, diskretwertige Signale als unterbrochene Linien dargestellt – eine Konvention, die auch im folgenden immer beibehalten werden wird. Der kontinuierlichen Ausgangsvariablen $y(t) \in \mathbb{R}^p$ der Regelstrecke wird durch einen Quantisierungsprozeß eine diskrete Meßvariable $y_d(t)$ zugeordnet, die Werte aus einer (endlichen) Menge Y_d von Symbolen annimmt. Als einfaches Beispiel kann man wiederum einen Füllstandsanzeiger heranziehen, der für alle $y(t)$, die einen vorgegebenen Schwellwert überschreiten, das Meßsymbol $y_d(t) = \text{„voll“}$ ausgibt. Das symbolische Stellsignal $u_d(t) \in U_d$ (beispielsweise „Ventil offen“, „Ventil geschlossen“) wird auf eindeutige Weise auf ein Streckeneingangssignal $u(t)$ abgebildet, das auf einer endlichen diskreten Teilmenge des \mathbb{R}^q „lebt“. $z(t)$ wird als externes Ausgangssignal bezeichnet. Diese „künstlich“ eingeführte (vektorielle) Größe dient zur Formulierung quantitativer regelungstechnischer Ziele. In der „klassischen“, rein kontinuierlichen Regelungstheorie besitzt z typischerweise Komponenten, die vom Zustand x des Streckenmodells abhängen (und Auskunft über die „Regelgüte“ geben), als auch Komponenten, in die die Stellgröße direkt eingeht. Letztere können zur Beurteilung des „Regelaufwandes“ herangezogen werden: Durch Formulierung eines geeigneten Kostenfunktional in Abhängigkeit von z können unrealistisch große Stellengriffe bestraft und somit verhindert werden. Im hier betrachteten Fall ist die Stellvariable dagegen a priori begrenzt – sie kann nur endlich viele diskrete Werte annehmen. Man kann deshalb i.a. darauf verzichten, eine direkte Abhängigkeit zwischen z und u vorzusehen. Im externen

Eingangssignal $w(t)$ werden sämtliche von außen auf den Regelkreis wirkenden Einflüsse zusammengefaßt – hierzu zählen beispielsweise Führungs- und Störgrößen.

Die Tatsache, daß die Spezifikationen mittels kontinuierlicher Variablen ausgedrückt werden, bestimmt Sichtweise und weiteres Vorgehen: Man betrachtet das in Bild 1.1 dargestellte Problem durch eine „kontinuierliche Brille“, also von der Streckenseite aus. Die zu lösenden Grundprobleme sind die der „klassischen“ Regelungstechnik – verschärft allerdings durch die Diskretwertigkeit der in den Regler eingespeisten und der vom Regler generierten Signale: Kann man durch Auswertung der symbolischen Meßgröße $y_d(t)$ über einen endlichen Zeitraum hinweg den kontinuierlichen Streckenzustand rekonstruieren? Läßt sich der Streckenzustand durch diskretwertige Eingriffe $u_d(t)$ in endlicher Zeit aus dem Ursprung in einen beliebig vorgegebenen Punkt seines Zustandsraums überführen? Kann der Zustand – wiederum in endlicher Zeit – von einem beliebigen Startpunkt in den Ursprung gezwungen werden? Diese Fragen nach dem Vorliegen der Eigenschaften „Beobachtbarkeit“, „Erreichbarkeit“ und „Steuerbarkeit“ werden für eine wichtige Klasse von Streckenmodellen in den Abschnitten 3.3 und 3.4 beantwortet. Fällt die Antwort positiv aus, so kann man eine konzeptionell einfache „Receding Horizon“ Strategie anwenden, um die gesteckten regelungstechnischen Ziele zu verwirklichen. Diese wird in Abschnitt 3.5 beschrieben.

1.1.2 Die diskrete Sicht der Dinge

Zu einer zweiten, ganz anderen Sicht der Dinge gelangt man, wenn Methoden der ereignisdiskreten Systemtheorie *bewußt* eingesetzt werden, um kontinuierliche oder hybride Systeme vereinfachend zu beschreiben. Ein solcher Schritt ergibt sich nahezu zwangsläufig, wenn ein komplexer technischer Prozeß durch eine hierarchische Regelungs- und Überwachungsstruktur beherrscht werden soll: Um ein in sich schlüssiges hierarchisches Konzept entwickeln zu können, benötigt man Modelle, die denselben Sachverhalt (dieselbe Regelstrecke) mit verschiedener Genauigkeit beschreiben. Die Ordnung einer solchen Modellhierarchie folgt typischerweise aus einer der Aufgabenstellung immanenten Rangfolge: Übergeordnete Ziele werden meist sehr viel weniger detailliert spezifiziert als untergeordnete Anforderungen (wie z.B. das Ausregeln von Störungen in der Nähe eines Arbeitspunktes). Letztere werden i.a. mit Methoden der klassischen Regelungstechnik angegangen und setzen deswegen ein kontinuierliches und damit vergleichsweise genaues Modell des

jeweils betrachteten Prozeßausschnitts voraus.

Um sich bei der Umsetzung übergeordneter, langfristiger Zielsetzungen nicht mit zu vielen Details zu belasten (um somit die verfolgte Aufgabe „überschaubar“ zu halten), beschränkt man sich auf höheren Hierarchieebenen meist auf gefilterte, „grobe“ Information. So interessiert beispielsweise nicht mehr der genaue Wasserstand in einem Verdampferbehälter, sondern nur, ob ein für den ordnungsgemäßen Betrieb notwendiger Mindestpegel erreicht ist. Genauso wird bei den Eingriffsmöglichkeiten eine „freiwillige“ Einschränkung in Kauf genommen: Von der Warte einer höheren Hierarchieebene aus mag beispielsweise die genaue Dosierung eines Stoffstroms keine Rolle mehr spielen, wichtig ist nur noch, *ob* bestimmte Stoffströme zugeschaltet werden oder nicht. Ein solcher (gewollter) Übergang auf qualitative Stell- und Meßsignale ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn gleichzeitig auch nicht benötigte Details eines kontinuierlichen Prozeßmodells über Bord geworfen werden. Statt dessen kommt eine grobe, rein ereignisdiskrete Abstraktion des Gesamtprozesses sowie sämtlicher unterlagerter Regeleinrichtungen zum Einsatz.

Es ergibt sich somit die in Bild 1.2 dargestellte Sichtweise des hybriden

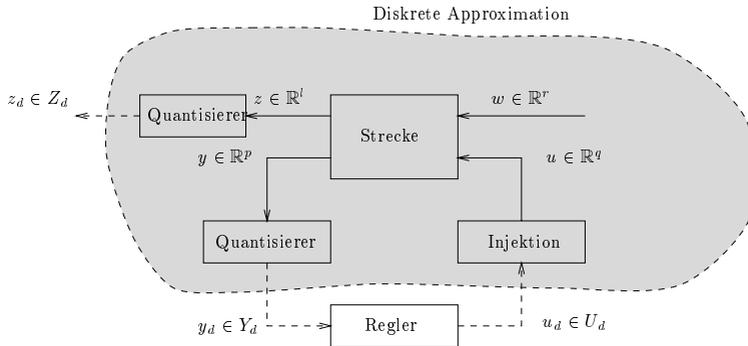


Bild 1.2: Hybrides Regelungsproblem aus diskreter Sicht.

Regelungsproblems: Man betrachtet die Aufgabenstellung durch die „diskrete Brille“ – sozusagen aus dem Blickwinkel des Reglers – und approximiert

das Verhalten von kontinuierlicher Strecke und unterlagerten kontinuierlichen Regelkreisen durch ein diskretes Modell. Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn man sich – wie in Bild 1.2 angedeutet – entschieden hat, Spezifikationen mittels symbolischer Variablen z_d zu formulieren. In einem zweiten Schritt können dann Methoden der ereignisdiskreten System- und Regelungstheorie angewandt werden, um eine geeignete diskrete Rückführung auszulegen. Man spaltet das hybride Problem also in zwei sukzessiv zu bearbeitende Teilprobleme auf. Es liegt allerdings auf der Hand, daß beide Schritte nicht völlig unabhängig voneinander durchgeführt werden können: Die Approximation muß in einer Art und Weise erfolgen, die ein ordnungsgemäßes Funktionieren des für die diskrete Abstraktion entworfenen Reglers auch dann *garantiert*, wenn er an das unterlagerte kontinuierliche Prozeßmodell „angeschlossen“ wird – das ursprüngliche Prozeßmodell und seine Approximation müssen einer sogenannten *Reduktionsbedingung* genügen. Diese zentrale Bedingung wird in Abschnitt 2.2.5 näher erläutert. In Abschnitt 2.4.5 wird eine Abstraktionsmethode vorgestellt, die die Reduktionsbedingung „automatisch“ erfüllt. Sie liefert eine Hierarchie von diskreten Approximationen des betrachteten kontinuierlichen Systems, die im Sinne ihrer Genauigkeit geordnet sind. Jedes Element dieser Modellhierarchie kommt – da es der Reduktionsbedingung genügt – als Grundlage für den im zweiten Schritt auszuführenden Reglerentwurf in Frage.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß die beschriebene Vorgehensweise auch zum Zuge kommen kann, wenn das zu approximierende System aus kontinuierlichen *und* diskreten Komponenten besteht: Man beschafft sich diskrete Abstraktionen der kontinuierlichen Anteile und „verschaltet“ diese mit den diskreten Komponenten zu einer diskreten Approximation des hybriden Gesamtsystems. Erfüllen die Abstraktionen der Einzelkomponenten die Reduktionsbedingung, so genügt ihr auch die Approximation des Gesamtsystems.

1.2 Zusammenfassung

Zwei wesentliche Ursachen für das Auftreten hybrider Regelprobleme wurden erläutert: Der hybride Charakter kann einer ansonsten kontinuierlichen Aufgabenstellung durch diskretwertige Meß- und/oder Stellgrößen aufgezwungen werden. In diesem Fall werden Aufgabenstellung und Lösungsansatz durch die Methoden der „klassischen“ kontinuierlichen Regelungstheorie bestimmt.

Resultiert der hybride Charakter dagegen aus der bewußten Entscheidung, (komplexe) kontinuierliche Phänomene durch (einfache) diskrete Modelle zu approximieren, so bestimmen die Methoden der ereignisdiskreten System- und Regelungstheorie die weitere Vorgehensweise.

1.3 Literaturhinweise

Als Standard-Referenz zum Thema „Hybride Regelsysteme“ gelten die in der Springer-Reihe *Lecture Notes in Computer Science* erschienenen Aufsatzsammlungen „Hybrid Systems I – IV“ [8, 4, 3, 5]. Sie enthalten eine Anzahl repräsentativer Beiträge aus der Informatik und der Regelungstechnik. Eine knappe Übersicht über viele der dort veröffentlichten Ansätze findet man in [9]. Die aus der Informatik stammenden Arbeiten zu diesem Themenkreis beschäftigen sich fast ausschließlich mit der *Verifikation* einer einfachen Klasse hybrider Systeme. Beispiele sind [1, 10, 11, 2]. Analyseansätze aus der Sicht der Regelungstechnik werden in [7, 12, 6] beschrieben. Die im Rahmen der vorliegenden Abhandlung besonders relevanten Arbeiten zur Synthese hybrider Systeme werden separat – in Kapitel 2 und 3 – aufgeführt.

- [1] Alur, R., Courcoubetis, C., Henzinger, T. A., und Ho, P.-H.: Hybrid automata: An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems. In [8], S. 209–229.
- [2] Alur, R., Courcoubetis, C., Henzinger, T. A., Ho, P.-H., Nicollin, X., Olivero, A., Sifakis, J., und Yovine, S.: The algorithmic analysis of hybrid systems. 11th International Conference on Analysis and Optimization of Systems (Cohen, G. und Quadrat, J.-P. (Hrsg.)), Lecture Notes in Control and Information Sciences 199, Springer-Verlag. 1994, S. 331–351.
- [3] Alur, R., Henzinger, T. und Sontag, E. (Hrsg.): *Hybrid Systems III – Verification and Control*, Lecture Notes in Computer Science 1066, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [4] Antsaklis, P., Kohn, W., Nerode, A. und Sastry, S. (Hrsg.): *Hybrid Systems II*, Lecture Notes in Computer Science 999, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

- [5] *Antsaklis, P., Kohn, W., Nerode, A. und Sastry, S. (Hrsg.): Hybrid Systems IV*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [6] *Chase, C., Serrano, J., und Ramadge, P.:* Periodicity and chaos from switched flow systems: Contrasting examples of discretely controlled continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), S. 70–83.
- [7] *Delchamps, D. F.:* Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35 (1990), S. 916–923.
- [8] *Grossman, R. L., Nerode, A., Ravn, A. P., und Rischel, H. (Hrsg.): Hybrid Systems*, Lecture Notes in Computer Science 736, Springer, Berlin, 1993.
- [9] *Labinaz, G., Bayoumi, M. M. und Rudie, K.:* Modeling and control of hybrid systems: a survey. In *Proc. 13th IFAC World Congress*, S. 293–304, 1996
- [10] *Manna, Z. und Pnueli, A.:* Verifying hybrid systems. In [8], S. 4–35.
- [11] *Nicollin, A., Olivero, A., Sifakis, J., und Yovine, S.:* An approach to the description and analysis of hybrid systems. In [8], S. 149–178.
- [12] *Ramadge, P. J.:* On the periodicity of symbolic observations of piecewise smooth discrete-time processes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35 (1990), S. 807–813.

‘The gross and net result of it is that people who spent most of their natural lives riding iron bicycles over the rocky roadsteads of this parish get their personalities mixed up with the personalities of their bicycle as a result of the interchanging of the atoms of each of them and you would be surprised at the number of people in these parts who nearly are half people and half bicycles.’
I let go a gasp of astonishment that made a sound in the air like a bad puncture.
‘And you would be flabbergasted at the number of bicycles that are half-human almost half-man, half-partaking of humanity.’

– Flann O’Brien: The Third Policeman

Kapitel 2

Diskrete Abstraktion und Regelung hybrider Systeme

2.1 Einführung

In diesem Kapitel wird der in Abschnitt 1.1.2 skizzierte Ansatz zur Behandlung hybrider dynamischer Systeme erläutert. Die Grundidee besteht in der Approximation aller kontinuierlicher Komponenten einer gegebenen Regelstrecke durch diskrete Modelle. Besitzt die Strecke selbst diskrete Anteile, so werden diese mit den diskreten Approximationen der kontinuierlichen Komponenten „verschaltet“ – auf diese Art und Weise erhält man eine *diskrete*

Abstraktion der gesamten (kontinuierlichen oder hybriden) Strecke. In einem darauf aufbauenden zweiten Schritt können dann Methoden der ereignisdiskreten Regelungstheorie eingesetzt werden, um eine diskrete Rückführung für die diskrete Approximation der Strecke zu entwerfen. Eine solche Vorgehensweise bietet sich – wie in Abschnitt 1.1.2 dargestellt – an, wenn man die Anforderungen an den Regelkreis durch diskrete Variable ausdrücken kann. Soll ein solcher Ansatz nicht zur bloßen Heuristik degenerieren, so muß man garantieren können, daß der Einsatz auf dieser Art entworfener Regler nicht nur an der diskreten Approximation, sondern auch am unterlagerten kontinuierlichen oder hybriden Streckenmodell zu den gewünschten Ergebnissen führt. Um diese Kernforderung gewährleisten zu können, muß die diskrete Abstraktion einer sogenannten *Reduktionsbedingung* genügen.

Diese Reduktionsbedingung läßt sich überaus anschaulich anhand der auf *J. C. Willems* zurückgehenden „Behavioural systems theory“ herleiten. Im Rahmen dieser Theorie kann man auch weitere zentrale Begriffe wie *Modellgenauigkeit* und *Modellreduktion* auf exakte Weise erklären, ohne sie mit mathematischen Details zu überfrachten. Dieses Kapitel beginnt deswegen mit einem kurzen Überblick über die Grundgedanken der *Willems*schen Systemtheorie (Abschnitt 2.2). Eine naheliegende Frage – kann man ein kontinuierliches (oder hybrides) Modell unter bestimmten Voraussetzungen *ohne Verlust an Genauigkeit* durch ein diskretes Modell ersetzen? – wird im sich daran anschließenden Abschnitt angegangen. Wir werden ein Beispiel kennenlernen, für das sich diese Frage tatsächlich positiv beantworten läßt. Gleichzeitig wird aber klar werden, daß eine Modellreduktion (und damit eine Approximation kontinuierlicher Modelle durch diskrete Systeme) nur in Ausnahmefällen ohne Verlust an Genauigkeit durchgeführt werden kann. In Abschnitt 2.4 wird deswegen das zentrale Problem behandelt, wie für eine große Klasse kontinuierlicher Modelle diskrete Abstraktionen bestimmt werden können, die der Reduktionsbedingung genügen. Dann bleibt nur noch, Synthesemethoden der ereignisdiskreten Regelungstheorie auf die abgeleiteten Approximationen anzuwenden. Dies geschieht in Abschnitt 2.5; dort wird ein auf der „supervisory control philosophy“ von *Ramadge* und *Wonham* basierendes Entwurfsverfahren beschrieben. Aus der Sicht der „klassischen“ Regelungstechnik mag dieses Verfahren zwar als ungewöhnlich oder gar „künstlich“ erscheinen, durch die Brille der *Willems*schen Systemtheorie betrachtet entpuppt es sich aber als „natürliche“ und elegante Vorgehensweise.

2.2 Das „Verhalten“ dynamischer Systeme – Ein Ausflug in die *Willemssche* Systemtheorie

2.2.1 Modelle

Dem Begriff des Modells kommt in der *Willemsschen* Systemtheorie eine zentrale Bedeutung zu. Unter einem *mathematischen Modell* wird ein Paar von Mengen $(\mathbb{U}, \mathcal{B})$ verstanden: \mathbb{U} ist die „Grundmenge“ (in der *Willemsschen* Terminologie auch als „Universum“ bezeichnet), in der das zu modellierende Phänomen „lebt“. Diejenigen Elemente in der Grundmenge, die durch das Modell zugelassen werden, faßt man in der Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathbb{U}$ zusammen (Bild 2.1). \mathcal{B} wird das *Verhalten* („behaviour“) des Modells genannt. Ein

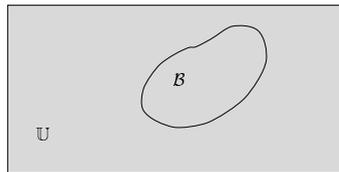


Bild 2.1: Grundmenge (Universum) \mathbb{U} und Verhalten \mathcal{B} eines Modells.

einfaches Beispiele soll diesen Sachverhalt erläutern:

Beispiel: Man möchte die Temperatur in Stuttgart am 24. Juli 2001 um 14 Uhr modellieren und damit vorhersagen. Die Grundmenge besteht aus allen Temperaturen über dem absoluten Nullpunkt: $\mathbb{U} = [-273.16^\circ\text{C}, \infty)$. Ein Modell greift einfach den von ihm als möglich erachteten Temperaturbereich heraus, z.B. $\mathcal{B} = [+15^\circ\text{C}, +35^\circ\text{C}]$.

Dieses Beispiel weist allerdings eine für ein Modell untypische Eigenschaft auf: Es wird lediglich eine Aussage für einen einzigen Zeitpunkt gemacht. Da das modellierte Phänomen – die Temperatur – meßbar ist, läßt sich diese Aussage überprüfen. Das Modell kann sowohl verifiziert (am 24. Juli 2001 um

14 Uhr wird in Stuttgart eine Temperatur zwischen 15 und 35 Grad Celsius gemessen) als auch falsifiziert werden (zum fraglichen Zeitpunkt ist es kälter als 15° C oder wärmer als 35° C). Im allgemeinen sind Modellaussagen aber nicht zeitlich begrenzt – dann entfällt natürlich auch die Möglichkeit einer meßtechnischen Verifikation. Dies wird anhand des folgenden ([46] entnommen) Beispiels deutlich:

Beispiel: Der Zusammenhang zwischen den Aggregatzuständen und der Temperatur von H_2O bei einem Druck von 1 bar soll modelliert werden. Die Grundmenge \mathbb{U} besteht aus dem kartesischen Produkt $\{\text{Eis, Wasser, Dampf}\} \times [-273.16^\circ\text{C}, \infty)$, also aus geordneten Paaren aus Aggregatzustand und Temperatur. Ein Modell greift wiederum eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathbb{U}$ heraus (Bild 2.2):

$$\mathcal{B} = (\{\text{Eis}\} \times [-273.16^\circ\text{C}, 0^\circ\text{C}]) \cup (\{\text{Wasser}\} \times [0^\circ\text{C}, 100^\circ\text{C}]) \cup (\{\text{Dampf}\} \times [100^\circ\text{C}, \infty)).$$

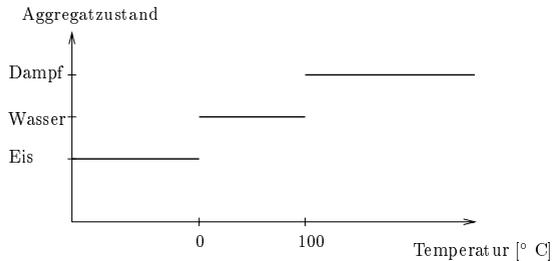


Bild 2.2: Temperatur und Aggregatzustand.

Es liegt auf der Hand, daß ein solches Modell zwar falsifiziert, nie aber verifiziert werden kann: Ein einziger außerhalb von \mathcal{B} liegender Meßwert widerlegt das Modell; die Tatsache, daß alle bisher zur Verfügung stehenden Meßwerte in \mathcal{B} enthalten sind, beweist demgegenüber nicht die Richtigkeit des Modells – man kann nie ausschließen, daß es durch eine zukünftige Messung widerlegt werden wird.

Bemerkenswert (und von *Willems* auch so beabsichtigt) ist die Nähe dieses Modellbegriffs zur *Popperschen* Erkenntnistheorie: Einem Modell kommt der Stellenwert einer (*empirisch- wissenschaftlichen Theorie*) zu, wenn – wie im eben zitierten Beispiel – die Möglichkeit einer meßtechnischen Überprüfung (von Aspekten) des Modellverhaltens und damit einer Falsifikation des Modells besteht. Beschränkt sich dagegen ein Modell beispielsweise auf Aussagen über die Zahl von Engeln, die auf einer Nadelspitze Platz finden, so entfällt diese Möglichkeit. Das Modell muß dann dem Bereich der Spekulation bzw. der Metaphysik zugeordnet werden. Der Vorgang der Überprüfung verläuft nach *Popper* [28] folgendermaßen: „Aus der vorläufig unbegründeten Antizipation, dem Einfall, der Hypothese, dem theoretischen System, werden ... empirisch möglichst leicht nachprüfbar bzw. anwendbare singuläre Folgerungen („Prognosen“) deduziert ... Über diese ... Folgerungen wird nun im Zusammenhang mit der praktischen Anwendung, den Experimenten usw., entschieden. Fällt die Entscheidung positiv aus ... , so hat das System die Prüfung vorläufig bestanden; wir haben keinen Anlaß, es zu verwerfen. Fällt eine Entscheidung negativ aus, werden Folgerungen *falsifiziert*, so trifft ihre Falsifikation auch das System, aus dem sie deduziert wurden. Die positive Entscheidung kann das System immer nur vorläufig stützen; es kann durch spätere negative Entscheidungen immer wieder umgestoßen werden. Solang ein System eingehenden und strengen deduktiven Nachprüfungen standhält ... , sagen wir, daß es sich *bewährt*.“¹

2.2.2 Dynamische Modelle

Zur *expliziten* Beschreibung zeitlicher Phänomene benötigt man natürlich ein dynamisches Modell – ein Modell, dessen Grundmenge und dessen Verhalten aus Funktionen über der Zeit bestehen. Ein dynamisches Modell setzt sich demzufolge aus folgenden Bausteinen zusammen: Einer Zeitachse \mathbb{T} , der Menge W , in der das zu modellierende Phänomen „lebt“, sowie dem Modellverhalten \mathcal{B} . Soll das betrachtete Phänomen beispielsweise für alle zukünftigen Zeitpunkte modelliert werden, wählt man $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$; interes-

¹Mit unterschiedlicher Begründung üben u.a. *A. J. Ayer* (z.B. [5]), *T. S. Kuhn* ([17]) und *P. Feyrabend* Kritik an dieser Auffassung. Letzterer faßt seine in [14] veröffentlichten Ansichten folgendermaßen zusammen: „Es gibt also keinen klar formulierbaren Unterschied zwischen Mythen und wissenschaftlichen Theorien. Die Wissenschaft ist eine der vielen Lebensformen, die die Menschen entwickelt haben, und nicht unbedingt die beste. Sie ist laut, frech, teuer und fällt auf.“

siert man sich hingegen nur für ausgesuchte diskrete Zeitpunkte, so setzt man $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, \dots\}$. Die Grundmenge des dynamischen Modells besteht dann aus allen denkbaren zeitlichen Verläufen („Signalen“) in W , d.h. aus der Menge aller Funktionen, die die gewählte Zeitachse auf W abbilden: $\mathbb{U} = W^{\mathbb{T}} := \{f : \mathbb{T} \rightarrow W\}$. Ein Modell wird wiederum einige Elemente der Grundmenge herausgreifen, in $\mathcal{B} \subset W^{\mathbb{T}}$ zusammenfassen und so eine nichttriviale Aussage über die Zukunft ermöglichen.

In dieser Begriffswelt läßt sich auch anschaulich erläutern, was man unter der *Güte* eines Modells versteht: Angenommen, es existieren zwei Modelle M_1 und M_2 desselben physikalischen Phänomens; die Grundmenge beider Modelle stimmt demzufolge überein, während sich ihr Verhalten unterscheidet (ansonsten wären beide Modelle identisch): $M_1 = (\mathbb{T}, W, \mathcal{B}_1)$, $M_2 = (\mathbb{T}, W, \mathcal{B}_2)$, $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$. Außerdem sei keines der beiden Modelle falsifiziert. Dann wird M_1 als *genauer* als M_2 bezeichnet, wenn $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Ein genaueres Modell ermöglicht also eine präzisere Vorhersage der Zukunft – sein Verhalten umfaßt weniger Signale.

Beispiel: Der Temperaturverlauf in Stuttgart ab dem 1. Januar 1999 soll vorhergesagt werden. Die *Modell-Grundmenge* ist

$$\mathbb{U} = [-273.16^\circ\text{C}, \infty)^{\mathbb{R}^+} = \{w(t) \mid w(t) \geq -273.16^\circ\text{C}, t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Das *Verhalten* eines sehr einfachen Modells wäre beispielsweise (vgl. Bild 2.3)

$$\mathcal{B} := \{w(t) \mid -30^\circ\text{C} \leq w(t) \leq 35^\circ\text{C}, t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Die Aussagekraft eines solchen Modells ist offenbar äußerst gering: \mathcal{B} enthält auch physikalisch unsinnige Signale – das Modell läßt zum Beispiel Temperaturen von $+35^\circ\text{C}$ in einer Winternacht und -30°C in der Mittagszeit im Hochsommer zu. Ein genaueres Modell zeigt Bild 2.4: Sein Verhalten besteht aus einem „Band“, das zwei überlagerte Sinuskurven umgibt. Eine der beiden Sinusfunktionen besitzt eine Periode von 365 Tagen – sie bildet den mittleren saisonalen Temperaturverlauf ab –, die andere eine Periode von 24 Stunden – sie erklärt die mittleren Temperaturunterschiede im Verlauf eines Tages. Man kann die Modellgenauigkeit weiter erhöhen (das Modellverhalten weiter einschränken), indem man beispielsweise nur noch Temperaturverläufe zuläßt, deren

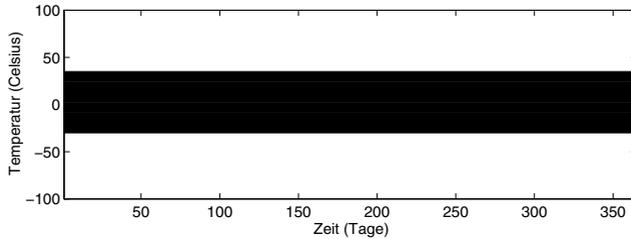


Bild 2.3: Modellierter Temperaturverlauf.

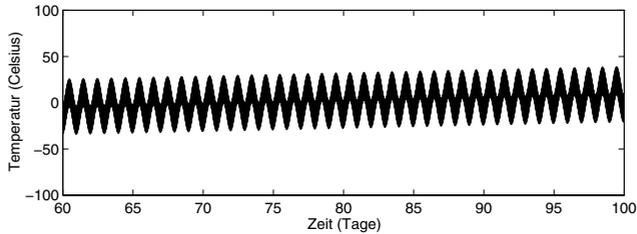


Bild 2.4: Modellierter Temperaturverlauf.

Ableitung bestimmte vorgegebene Grenzen nicht über- bzw. unterschreitet.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des *Willemsschen* Modellbegriffs liegt im Verzicht auf eine Unterscheidung von System-*Ein-* und -*Ausgängen*. Dies wird anhand des folgenden Beispiels deutlich:

Beispiel: Das Ohmsche Gesetz modelliert das Verhältnis von Strom $i(t)$ und Spannung $u(t)$ an einem (Ohmschen) Widerstand als konstante positiv reelle Zahl: $R = \frac{u(t)}{i(t)}$. Will man diese Gesetzmäßigkeit „behaviouristisch“ darstellen, so wählt man als

Modell-Grundmenge $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}$ – die Menge aller Signale $\{(i(t), u(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0\}$. Das Verhalten des Modells besteht dann aus der in Bild 2.5 gezeigten Teilmenge

$$\mathcal{B} = \{(i(t), u(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid u(t) = R i(t), t \geq 0\}.$$

Es spielt offensichtlich keine Rolle, ob ein Spannungsverlauf an-

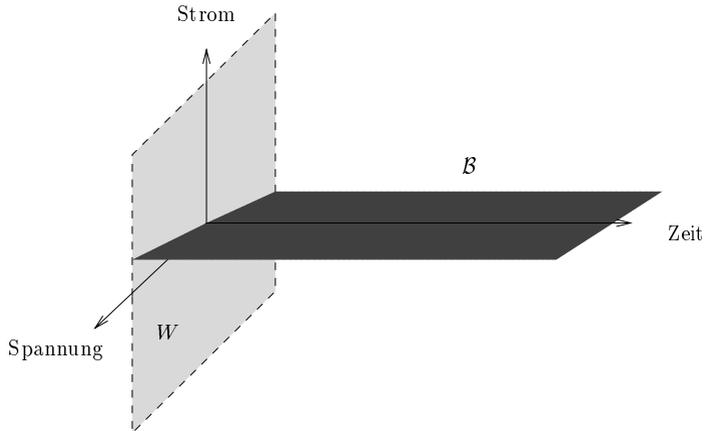


Bild 2.5: Beispiel: Strom und Spannung an einem Ohmschen Widerstand.

gelegt wird, und der Stromverlauf sich entsprechend dem Ohmschen Gesetz einstellt, oder ob der Strom eingepreßt wird, und der Spannungsverlauf sich einstellt.

Das vorangehende Beispiel macht deutlich, daß es physikalisch sinnvoll sein kann, auf eine Unterscheidung zwischen Ein- und Ausgängen eines Systems (und damit auf eine Kausalitätsaussage) zu verzichten: Die Rolle von Ein- und Ausgang wird den beiden Modellgrößen hier erst durch die vorgesehene Anwendung zugewiesen, hat aber mit der modellierten physikalischen Gesetzmäßigkeit nichts zu tun. Bei ereignisdiskreten Modellen kommt noch

ein weiterer wichtiger Grund für das Abgehen vom traditionellen regelungstechnischen Ein-/Ausgangsdanken hinzu: Solche Modelle beschreiben reale Prozesse oft auf einer Abstraktionsebene, bei der Eingriffsmöglichkeiten nicht mehr explizit als Stellensignale abgebildet werden. Dies trifft insbesondere auf die im Rahmen der *Ramadge/Wonham*-Theorie zum Einsatz kommenden Modelle zu.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß die Beschreibung eines dynamischen Systems durch sein Verhalten \mathcal{B} (d.h. durch Mengen i.a. unendlich vieler möglicher Trajektorien) in erster Linie als *Anschauungshilfsmittel* dient – wie gut sich bestimmte Fragestellungen in der „behaviouristischen“ Sichtweise erklären lassen, zeigt sich beispielsweise beim „Verschalten“ dynamischer Systeme (Abschnitt 2.2.3). Zur Durchführung konkreter Berechnungen benötigt man dagegen nach wie vor eine endlich-dimensionale Darstellung des betrachteten Sachverhalts – z.B. ein Zustandsmodell.

2.2.3 Das „Verschalten“ dynamischer Systeme

Zwei auf derselben Grundmenge $(W_1 \times W_2)^T$ angesiedelte dynamische Systeme sollen in der in Bild 2.6 gezeigten Weise verschaltet werden; dabei ist irrelevant, welches der beiden Signale Eingang (bzw. Ausgang) für welches der beiden Systeme ist. Das Verhalten \mathcal{B} des verkoppelten Systems in der

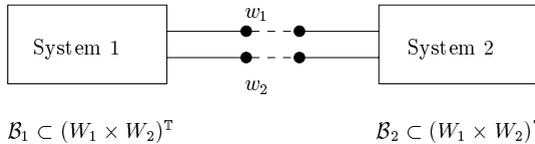


Bild 2.6: Verschalten zweier Systeme.

Grundmenge $(W_1 \times W_2)^T$ muß offenbar den dynamischen Gesetzmäßigkeiten beider Systeme genügen – es können nur solche Signalkomplexe $(w_1(t), w_2(t))$ auftreten, die sowohl von System 1 als auch von System 2 zugelassen werden (Bild 2.7):

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2. \tag{2.1}$$

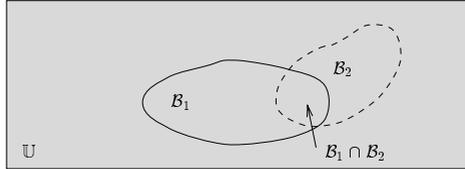


Bild 2.7: Verschalten zweier Systeme.

Der „klassische“ Regelkreis stellt offensichtlich einen Spezialfall dieser Verschaltung dar: man betrachtet gerichtete Signale (w_1 wirke z.B. von System 1 auf System 2, w_2 in umgekehrter Richtung), dann kann eines der beiden Systeme als Strecke, das andere als Regler interpretiert werden.

Wie sich „alltägliche“ Aufgaben der klassischen Regelungstechnik in dieser Sichtweise erklären lassen, wird anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht:

Beispiel: Wir betrachten eine instabile Regelstrecke erster Ordnung mit Stell- und Meßsignalen $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\dot{y}(t) = y(t) + u(t).$$

Das Stellsignal sei (bis auf die Forderung der stückweisen Stetigkeit) keinen Einschränkungen unterworfen. Mit der Anfangsbedingung $y(t=0) = y_0$ ergibt sich das Meßsignal in Abhängigkeit von u :

$$y(t) = e^t y_0 + \int_0^t e^{t-\tau} u(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Nun führt man die Meßgröße über eine negative Verstärkung auf den Streckeneingang zurück:

$$u(t) = -2y(t).$$

Hierdurch verschiebt man den Streckenpol von $s = 1$ nach $s = -1$, stabilisiert also die Regelstrecke. Als Differentialgleichung des geschlossenen Kreises erhält man

$$\dot{y}(t) = -y(t);$$

der zeitliche Verlauf von Meß- und Stellgröße im geschlossenen Kreis lautet also:

$$y(t) = e^{-t}y_0; \quad (2.3)$$

$$u(t) = -2e^{-t}y_0. \quad (2.4)$$

Betrachtet man Streckenmodell und Regler separat, so ist jeweils eine breite Klasse von Stellsignalen zugelassen (alle stückweise stetigen Funktionen der Zeit); durch das Verschalten beider Systeme (d.h. durch die Schnittmengenoperation in Bild 2.7) wird ein einziges (von der Anfangsbedingung abhängiges) Stellsignal (2.4) „herausgegriffen“. Dieses zwingt dem Streckenmodell einen abklingenden Verlauf für $y(t)$ auf: Setzt man (2.4) in (2.2) ein, so erhält man (2.3).

Nun stellt sich natürlich sofort die Frage, ob die Schnittmenge der Verhalten zweier dynamischer Modelle auch leer sein kann. Bei ereignisdiskreten Systemen – sofern sie nicht durch einen festen Zeittakt „getrieben“ werden – ist dies tatsächlich möglich. Man spricht in diesem Fall von einem „Blockieren“ des verschalteten Systems. Falls \mathbb{T} allerdings einem von außen vorgegebenen Zeitraster entspricht (z.B. $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, \dots\}$), stellt ein solches Blockieren eine Anomalie dar; dies kann man sich leicht anhand eines Spezialfalls – der Klasse linearer zeitinvarianter Systeme in kontinuierlicher Zeit – verdeutlichen: Angenommen, man möchte zwei solche Systeme mit Übertragungsfunktionen $G(s)$ und $K(s)$ mittels einer negativen Rückführung verknüpfen. Dann entspricht „Blockieren“ der Verletzung der bekannten „well-posedness condition“ $1 + G(\infty)K(\infty) \neq 0$. Dies wiederum bedeutet, daß die betrachteten Systeme sich nicht in der gewünschten Form verschalten lassen. Dieser Effekt wird im folgenden Beispiel anhand eines trivialen Sonderfalls auch graphisch veranschaulicht.

Beispiel: Man betrachte den in Bild 2.8 gezeigten (aus regelungstechnischer Sicht natürlich unsinnigen) Kreis mit „Streckengleichung“ $y(t) = 2u(t) + 1$ und „Reglergleichung“ $u(t) = \frac{1}{2}y(t)$. Die (ebenfalls in Bild 2.8 aufgetragenen) Verhalten von Streckenmodell und Regler lauten also

$$\mathcal{B}_1 = \{(y(t), u(t)) \mid y(t) = 2u(t) + 1, t \geq 0\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ (y(t), u(t)) \mid u(t) = \frac{1}{2}y(t), t \geq 0 \right\}.$$

\mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 schneiden sich offenbar nicht.

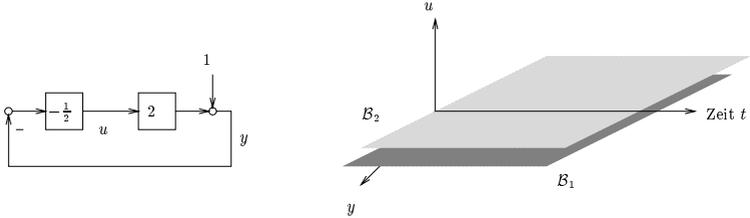


Bild 2.8: Zwei „nicht verschaltbare“ Systeme.

In vielen Fällen sind die zu verschaltenden Systeme allerdings auf verschiedenen Grundmengen definiert (Bild 2.9):

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &\subset (W \times W_1)^T, \\ \mathcal{B}_2 &\subset (W \times W_2)^T, \quad W_1 \neq W_2.\end{aligned}$$

Das Verhalten des Gesamtsystems kann dann nicht direkt als Schnittmenge

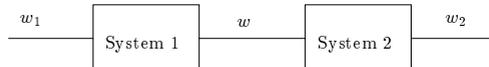


Bild 2.9: Verschalten zweier Systeme mit verschiedenen Grundmengen.

von \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 gedeutet werden. Mit Hilfe von *natürlichen Projektionen* und ihrer Inversen gelangt man aber wieder zum gewohnten Sachverhalt. Unter der *natürlichen Projektion* von \mathcal{B}_i , $i = 1, 2$, auf W_i versteht man:

$$\text{Proj}_{W_i}(\mathcal{B}_i) := \{w_i(t) \in W_i^T \mid \exists w(t) \in W^T, \text{ so daß } (w(t), w_i(t)) \in \mathcal{B}_i\}. \quad (2.5)$$

Die inverse Projektion von $\mathcal{B}_i \subset (W \times W_i)^T$ auf W_j , $j \neq i$, definiert man als:

$$\text{Proj}_{W_j}^{-1}(\mathcal{B}_i) := \{(w(t), w_i(t), w_j(t)) \in (W \times W_i \times W_j)^T \mid (w(t), w_i(t)) \in \mathcal{B}_i\}. \quad (2.6)$$

Offensichtlich gilt für jedes $\mathcal{B}_i \subset (W \times W_i)^T$:

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{W \times W_i} \left(\text{Proj}_{W_i}^{-1}(\mathcal{B}_i) \right) &= \mathcal{B}_i, \\ \text{Proj}_W^{-1} \left(\text{Proj}_{W_i}(\mathcal{B}_i) \right) &\supseteq \mathcal{B}_i. \end{aligned}$$

Das Verhalten des verschalteten Systems auf der Grundmenge $(W_1 \times W \times W_2)^T$ erhält man durch „Erweitern“ (inverse Projektion) der Verhalten \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 und anschließende Schnittmengenbildung. Interessiert man sich nur für die äußeren Größen w_1 und w_2 , so projiziert man das Resultat auf $(W_1 \times W_2)^T$ und eliminiert damit die „Verknüpfungsvariable“ w :

$$\mathcal{B} = \text{Proj}_{W_1 \times W_2} \left(\text{Proj}_{W_2}^{-1}(\mathcal{B}_1) \cap \text{Proj}_{W_1}^{-1}(\mathcal{B}_2) \right). \quad (2.7)$$

2.2.4 Reglerentwurf

Das Verschalten einer Strecke mit einem Regler bewirkt – wie in Abschnitt 2.2.3 dargestellt – die Einschränkung des „freien“ Systemverhaltens \mathcal{B} . Bevor man sich an den Entwurf eines Reglers macht, muß man also zunächst klären, *wie* das Streckenverhalten eingeschränkt werden soll – man muß (dynamische) Spezifikationen formulieren. Dies kann prinzipiell auf zweierlei Weise erfolgen: Man kann verlangen, daß das Verhalten der geregelten Strecke in einer vorgegebenen Menge $\mathcal{B}_{spez} \subset \mathbb{U}$ *erwünschter* Trajektorien enthalten ist. Man kann andererseits auch fordern, daß das geregelte Streckenmodell bestimmte *verbotene* Verhaltensmuster nicht aufweisen darf. Der zweite Fall läßt sich natürlich leicht in den ersten überführen, indem man alle verbotenen Signalkombinationen in der Menge \mathcal{B}_{verb} zusammenfaßt und dann $\mathcal{B}_{spez} := \mathbb{U} - \mathcal{B}_{verb}$ definiert.

Im einfachsten Fall (Regler und Streckenmodell „leben“ auf derselben Grundmenge) muß das Reglerverhalten \mathcal{B}_R also folgenden Bedingungen genügen:

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_R \neq \emptyset, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_R \subseteq \mathcal{B}_{spez} \quad (2.9)$$

– Regler und Streckenmodell lassen sich verschalten (sie „blockieren“ sich nicht gegenseitig, Gl. (2.8)), und der Regelkreis erfüllt die vorgegebenen Spezifikationen (Gl. (2.9)).

2.2.5 Modellreduktion und Regelung

Jetzt wenden wir uns der Frage zu, welche Bedingungen eine im Hinblick auf einen späteren Reglerentwurf durchgeführte Modellreduktion erfüllen muß. Wir gehen also von einem Streckenmodell aus, das wir – wegen zu komplexer (schwieriger) Dynamik – als ungeeigneten Ausgangspunkt für einen Reglerentwurf einstufen. Die Aufgabe besteht offenbar darin, ein einfacheres Modell zu finden, für dieses eine Rückführung auszulegen und zu *garantieren* daß der Regler auch dann die Einhaltung der vorgegebenen Spezifikationen erzwingt, wenn er mit dem ursprünglichen (komplexen) Modell verschaltet wird. Anhand von Bild 2.10 läßt sich leicht erklären, *wie* eine solche Garantie gegeben werden kann: Das Verhalten \mathcal{B}_{red} des reduzierten Modells M_{red} muß

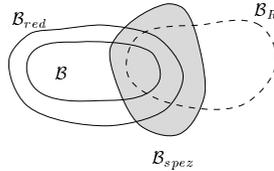


Bild 2.10: Modellreduktion und Reglerentwurf.

das Verhalten \mathcal{B} des ursprünglichen Modells M einschließen:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{red}. \quad (2.10)$$

Setzt man nun voraus, daß entworfener Regler und detailliertes Streckenmodell verschaltbar sind, so folgt aus (2.10): Gewährleistet der Regler die Einhaltung der Spezifikationen am reduzierten Modell, so zwingt er auch das detaillierte Modell M , den Spezifikationen zu genügen:

$$\mathcal{B}_{red} \cap \mathcal{B}_R \subseteq \mathcal{B}_{spez} \implies \mathcal{B} \cap \mathcal{B}_R \subseteq \mathcal{B}_{spez}. \quad (2.11)$$

Gleichung (2.10) bezeichnen wir im folgenden als *Reduktionsbedingung*. Sie besagt, daß das reduzierte Modell M_{red} jede Ein-/Ausgangs-Trajektorie generieren kann, die auch durch das ursprüngliche Modell M hervorgebracht werden kann. Andererseits darf \mathcal{B}_{red} Lösungen aufweisen, die mit M nicht kompatibel sind. In der in Abschnitt 2.2.2 eingeführten Terminologie läßt

sich die Reduktionsbedingung paraphrasieren als: „ M muß mindestens so genau wie M_{red} sein.“ Stimmt das Verhalten von reduziertem und ursprünglichem Modell überein ($\mathcal{B}_{red} = \mathcal{B}$), so spricht man von *exakter Modellreduktion* – in diesem Fall, kann der (Zustands-) Mechanismus, der ein bestimmtes Verhalten hervorbringt, ohne Genauigkeitseinbuße (ohne Veränderung des Modellverhaltens) vereinfacht werden.

2.3 Exakte Modellreduktion

In diesem Abschnitt diskutieren wir Bedingungen, die eine exakte Modellreduktion zulassen. Als Einführung betrachten wir zwei einfache, auf den ersten Blick sehr ähnliche Beispiele. Ihr dynamisches Verhalten wird sich aber als grundverschieden erweisen: In einem Fall stellt sich Chaos ein, im anderen Fall ein sehr einfaches periodisches Verhalten. Im ersten Beispiel ist eine exakte Modellreduktion unmöglich, im zweiten Beispiel kann das Modell tatsächlich ohne Verlust an Genauigkeit reduziert werden – sein Verhalten läßt sich exakt durch einen sehr viel einfacheren Zustandsmechanismus reproduzieren.

2.3.1 Zwei einfache Beispiele

Die folgenden Beispiele wurden von *Chase*, *Serrano* und *Ramadge* in einer Reihe von Veröffentlichungen untersucht [11, 10, 12]. An dieser Stelle sollen nur diejenigen Aspekte der zitierten Arbeiten vorgestellt werden, die im Rahmen der in diesem Kapitel angesprochenen Fragestellungen von Interesse sind.

Wir betrachten ein aus drei (idealisierten) identischen Wassertanks bestehendes System. Jeder Tank besitze eine Grundfläche von 0.1m^2 . In Beispiel 1 wird angenommen, daß aus allen Behältern – unabhängig von ihrem Füllstand – $1/3$ Liter Flüssigkeit pro Sekunde abströmt (dies kann man sich z.B. durch eine unterlagerte Regelung realisiert denken). Die (symbolische) Stellgröße ist die Position eines Zulaufrohres, das (verzögerungsfrei) zwischen den Tanks umschalten kann (Bild 2.11). Der konstante Zulaufstrom betrage 1 Liter pro Sekunde.

Beispiel 2 stellt ein in gewisser Weise duales System dar (Bild 2.12): In jeden der drei identischen Behälter strömt $1/3$ Liter Wasser pro Sekunde. Die symbolische Stellgröße ist in diesem Fall die Position eines Abflußstut-

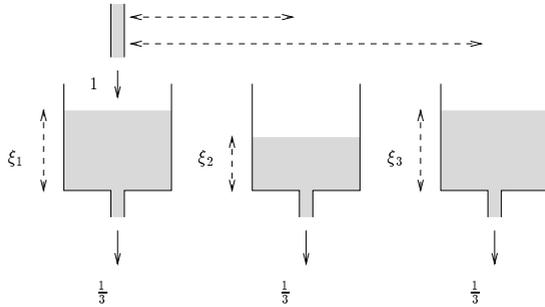


Bild 2.11: Beispielsystem „Schaltender Zulauf“.

zens, der (verzögerungsfrei) zwischen den Tanks umgeschaltet werden kann; er entnimmt dem System – unabhängig vom Füllstand des „angewählten“ Behälters – 1 Liter Flüssigkeit pro Sekunde.

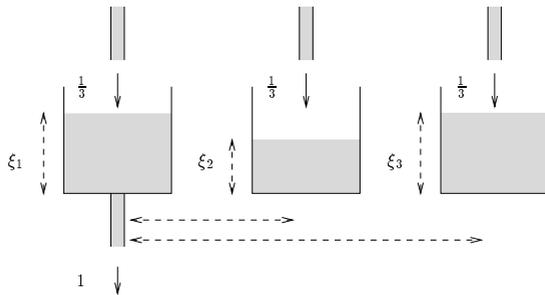


Bild 2.12: Beispielsystem „Schaltender Abfluß“.

Wir werden uns nun davon überzeugen, daß sich beide Systeme bei Verwenden der jeweils intuitiv einfachsten Regelungsstrategie völlig unterschiedlich verhalten:

2.3.1.1 Beispielsystem „Schaltender Zulauf“

Bezeichnen wir die (in cm pro Sekunde gemessenen) Füllstandsänderungen in Behälter i , $i = 1, \dots, 3$, mit $\dot{\xi}_i$ und lassen alle Einheiten weg, so erhalten wir folgende Zustandsdifferentialgleichungen für das Streckenmodell:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + u(t); \quad (2.12)$$

der (vektorielle) Streckeneingang $u(t)$ kann drei diskrete Werte annehmen, die den Stellsymbolen $u_d = u_d^{(i)}$ („Zulauf auf Behälter i , $i = 1, 2, 3$, richten“) entsprechen:

$$\begin{aligned} u(t) &\in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \\ u_d(t) &\in \left\{ u_d^{(1)} \quad u_d^{(2)} \quad u_d^{(3)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sämtliche Anfangsbedingungen $\xi_i(t_0)$ seien nichtnegativ, ihre Summe auf den Wert 1 normiert:

$$\xi_i(t_0) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^3 \xi_i(t_0) = 1. \quad (2.15)$$

Dem Regler wird nur mitgeteilt, zu welchem Zeitpunkt welcher Behälter leergelaufen ist. Eine sinnvolle Regelstrategie lautet dann: Wenn Tank i leer ist, schalte den Zulauf sofort auf Position i (i.e. $u_d = u_d^{(i)}$) und belasse ihn dort, bis der Wasserstand in einem anderen Behälter den Wert 0 erreicht hat.“²

²Den Fall, daß sich zwei Behälter exakt gleichzeitig entleeren, schließen wir der Einfachheit halber aus: Man kann leicht zeigen, daß die Menge der Anfangsbedingungen, die zum Eintreten dieser Situation führt, Maß 0 besitzt.

Da dem System zu- und abfließender Volumenstrom für alle t übereinstimmen, bleiben die Streckentrajektorien an die Fläche $\sum_{i=1}^3 \xi_i = 1$ gefesselt. Durch das angeführte Regelgesetz wird die Menge der möglichen Zustände weiterhin auf den physikalisch sinnvollen Teil dieser Fläche – den Rand und das Innere des in Bild 2.13 gezeigten Dreiecks beschränkt. Man kann sich nun leicht überlegen, wie die Trajektorien des Regelkreises auf dieser Zustandsmenge verlaufen: Trifft eine Trajektorie auf den Rand des Dreiecks (i.e. Behälter i ist leer), so wird die Stellgröße auf das Symbol $u_d^{(i)}$ umgeschaltet, und die Trajektorie läuft im rechten Winkel von dieser Dreiecksseite weg, bis sie an einer anderen Stelle wiederum an die Begrenzung stößt (Bild 2.14).

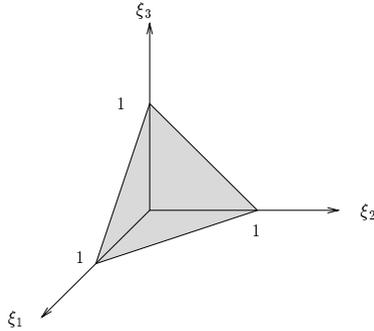


Bild 2.13: Zustandsmenge des geregelten Systems.

Nun führen wir noch eine weitere Vereinfachung durch: Wir betrachten den Zustand nur zu solchen Zeitpunkten t_k , zu denen die Trajektorie auf den Rand des Dreiecks aufläuft, die Stellgröße also umschaltet:

$$x(t_k) := \xi(t_k). \quad (2.16)$$

Hierdurch definieren wir eine eindimensionale Zustandsmenge

$$X := \left\{ \xi \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1; \xi_i \geq 0; \xi_1, \xi_2 \text{ oder } \xi_3 = 0 \right\} \quad (2.17)$$

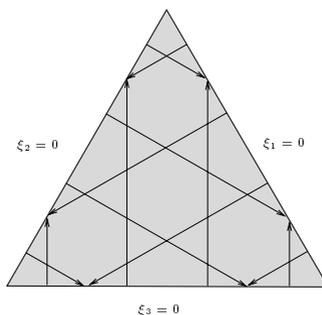


Bild 2.14: Trajektorien des geregelten Systems.

– den besagten Rand des Dreiecks. Die Transitionsfunktion des Regelkreises, die den Jetztzustand $x(t_k)$ auf den Folgezustand $x(t_{k+1})$ abbildet, bezeichnen wir mit α :

$$\alpha : X \rightarrow X \quad (2.18)$$

$$x(t_{k+1}) = \alpha(x(t_k)). \quad (2.19)$$

Nun simulieren wir dieses System – z.B. für die Anfangsbedingungen $\xi_1 = 0.41$, $\xi_2 = 0.59$, $\xi_3 = 0.0$. Bild 2.15 zeigt die Füllstände $x_1(t_k)$ und $x_2(t_k)$ über dem Zeitindex k (der Wasserstand in Behälter 3 wird durch die Normierungsbedingung eindeutig festgelegt). Man vermutet sofort chaotisches Systemverhalten.

In der Tat weist die Transitionsfunktion α alle definierenden Eigenschaften eines chaotischen dynamischen Systems auf [13]:

- α hängt sensitiv von den Anfangsbedingungen ab (d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so daß man in jeder beliebig kleinen Umgebung eines jeden Elements $x \in X$ einen Punkt \tilde{x} und ein $m \in \mathbb{N}$ finden kann, für die gilt: $|\alpha^m(x) - \alpha^m(\tilde{x})| > \delta$.)
- α ist topologisch transitiv (d.h. in jeder beliebig kleinen Umgebung eines jeden Elements in X existieren Punkte, die durch Iterieren über α beliebig dicht an jeden anderen Punkt in X herangeführt werden),

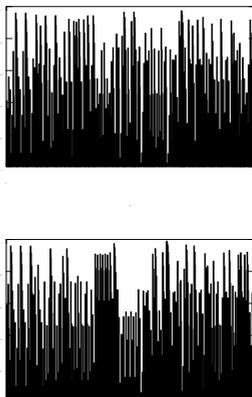


Bild 2.15: Simulation von $x_1(t_k)$ und $x_2(t_k)$.

- periodische Punkte (d.h. Punkte, die durch wiederholte Anwendung von α auf sich selbst abgebildet werden) liegen dicht in X .

Diese Eigenschaften kann man leicht verifizieren, indem man X auf den Einheitskreis C_1 „abrollt“, so daß die Eckpunkte „links unten“, „rechts unten“ und „oben“ dem Bogenmaß $\Theta = -\pi/3, \pi/3$ und π entsprechen. Hierdurch wird eine homöomorphe Abbildung $h : X \rightarrow C_1$ definiert (h ist bijektiv; sowohl h als auch h^{-1} sind stetig). Diese wiederum induziert eine Funktion

$$\begin{aligned} \alpha_C & : C_1 \longrightarrow C_1 \\ \Theta(t_{k+1}) & = \alpha_C(\Theta(t_k)) \\ & = -2\Theta(t_k) + \pi \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

die im Hinblick auf ihre Dynamik exakt dieselben Eigenschaften aufweist wie die Transitionsfunktion α [13].

2.3.1.2 Beispiel „Schaltender Abfluß“

Die Zustandsdifferentialgleichung dieses Beispiels stellt eine einfache Modifikation von Gl. (2.12) dar:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - u(t), \quad (2.20)$$

wobei $u(t)$ Gl. (2.13) genügt, und die zugeordneten Stellsymbole $u_d^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, für „Ablaufstutzen auf Behälter i richten“ stehen. Anfangs- und Normierungsbedingung (2.14), (2.15) werden unverändert übernommen. Der Regler verfügt allerdings über andere Information als im vorangehenden Beispiel: Ihm wird – außer dem Zeitpunkt des Leerlaufens eines Tanks – mitgeteilt, welcher Behälter den zu diesem Zeitpunkt höchsten Wasserstand aufweist. Bildlich gesprochen: Der Regler „bemerkt“ nicht nur, wenn die Systemtrajektorien auf die Berandung des Dreiecks in Bild 2.13 treffen, sondern auch welcher Ecke der Auftreffpunkt am nächsten liegt³. Eine geeignete Regelstrategie lautet dann: „Wenn ein Tank leerläuft, richte den Abflußstutzen auf denjenigen Behälter, der den höchsten Wasserstand aufweist, und belasse ihn dort, bis sich dieser entleert hat.“ Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Menge der möglichen Zustände des geregelten Systems mit der Zustandsmenge im vorangehenden Beispiel übereinstimmt: Die Systemtrajektorien können das in Bild 2.13 gezeigte Dreieck nicht verlassen. Sie laufen in rechtem Winkel auf eine der Dreiecksseiten zu; beim Auftreffen wird die Stellgröße umgeschaltet, die Trajektorien laufen dann rechtwinklig auf die „entferntere“ der beiden anderen Seiten zu (Bild 2.16).

Auch in diesem Fall kann man die Untersuchung des Systems vereinfachen, wenn man die Zustände nur zu den „Umschaltzeitpunkten“ t_k betrachtet: Wir führen also wiederum die eindimensionale Zustandsmenge (2.17) ein. Wie man Bild 2.16 entnehmen kann, besitzt die Transitionsfunktion (2.18), (2.19) in diesem Fall kontraktiven Charakter: Anders als im vorangehenden Beispiel werden Abschnitte von X durch Iteration über α auf kleinere Abschnitte abgebildet. α kann demzufolge nicht die (zuvor angeführten) ein chaotisches System kennzeichnenden Eigenschaften aufweisen. Tatsächlich, simuliert man das Verhalten des Regelkreises zu den Umschaltzeitpunkten

³Den Mittelpunkt einer jeden Dreiecksseite ordnen wir einfach einer der Ecken zu, so daß identische Wasserstände in den nichtleeren Behältern kein Problem darstellen.

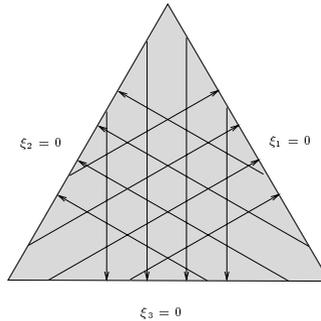


Bild 2.16: Trajektorien des geregelten Systems.

und trägt die resultierende Folge von Stellsymbolen (Position des Abflußstutzens) auf, so erkennt man periodisches Verhalten. Für die Anfangsbedingung $x(t_0) = [0.41 \ 0.59 \ 0.0]^T$ erhält man z.B.:

$$u_d(t_k) = \{u_d^{(2)}, u_d^{(1)}, u_d^{(3)}, u_d^{(2)}, u_d^{(1)}, u_d^{(3)}, u_d^{(2)}, \dots\}.$$

Offensichtlich können wir diese Folge auch mittels eines sehr viel einfacheren dynamischen Systems – eines deterministischen Automaten mit endlich vielen Zuständen – erzeugen. Interessiert man sich also nur für die zeitliche Abfolge der Symbole $u_d^{(j)}$ (d.h. für das Verhalten des Systems auf der Grundmenge U_d^N), so ist eine *exakte* Modellreduktion möglich. Dieses Phänomen kann man anhand einiger Überlegungen aus der Theorie mengendynamischer Systeme leicht erklären.

2.3.2 Mengendynamische Systeme

Mit dem Begriff „Mengendynamische Systeme“ belegt man eine breite Klasse (zeitdiskreter) dynamischer Systeme, die mit einem Minimum an Modellannahmen auskommen. Die Wertebereiche aller beteiligter Signale bestehen aus Mengen ohne jede „aufgezwungene“ algebraische Struktur.

2.3.2.1 Algebraische Grundlagen

Zunächst wiederholen wir einige einfache algebraische Grundlagen (z.B. [23]).

Binärrelationen: Eine *Binärrelation* auf einer Menge M ist eine Unter-
menge $B \subset M \times M$. Eine Binärrelation B auf M heißt

- *reflexiv*, wenn für alle $s \in M$ gilt: $(s, s) \in B$;
- *symmetrisch*, wenn für alle $(s_1, s_2) \in B$ gilt, daß auch $(s_2, s_1) \in B$;
- *antisymmetrisch* (oder *identitiv*), wenn aus $(s_1, s_2) \in B$ und $(s_2, s_1) \in B$ folgt, daß $s_1 = s_2$;
- *transitiv*, wenn für alle $(s_1, s_2) \in B$ und $(s_2, s_3) \in B$ gilt, daß auch $(s_1, s_3) \in B$.

Statt $(s_1, s_2) \in B$ schreibt man auch $s_1 B s_2$.

Partielle und vollständige Ordnungen: Eine Binärrelation B auf M heißt *partielle Ordnung* bzw. *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Partielle Ordnungen werden üblicherweise mit „ \leq “ bezeichnet. Wenn zusätzlich für *jedes* Paar $s_1, s_2 \in M$ entweder $s_1 \leq s_2$ oder $s_2 \leq s_1$ gilt, spricht man von einer *vollständigen Ordnung*.

Partiell geordnete Mengen: Wenn \leq eine partielle Ordnung auf M darstellt, nennt man das Paar (M, \leq) eine *partiell geordnete Menge*. In einer solchen Menge unterscheidet man zwischen minimalen und kleinsten sowie zwischen maximalen und größten Elementen:

Ein Element $s_{\max} \in M$ heißt *maximal*, wenn für jedes $s \in M$ gilt: $s_{\max} \leq s \Rightarrow s = s_{\max}$. Nun betrachtet man eine Teilmenge $\tilde{M} \subset M$. Ein Element $s_{os} \in M$ heißt *obere Schranke* für \tilde{M} , wenn für alle $s \in \tilde{M}$ gilt: $s \leq s_{os}$. Es liegt auf der Hand, daß für eine Teilmenge \tilde{M} mehrere obere Schranken existieren können. Wenn eine dieser oberen Schranken Element der Teilmenge \tilde{M} selbst ist, nennt man sie *größtes Element* von \tilde{M} . Analog definiert man *minimale Elemente*, *untere Schranken* und *kleinste Elemente*. Eine Menge kann offenbar höchstens *ein* größtes und *ein* kleinstes Element besitzen. Schließlich benötigen wir noch den Begriff der *größten unteren Schranke* $\inf(\tilde{M})$ einer Teilmenge \tilde{M} von M : Hierunter versteht man das

größte Element der Menge aller unteren Schranken von \tilde{M} . Die *kleinste obere Schranke* $\sup(\tilde{M})$ wird auf analoge Weise eingeführt. Man beachte, daß $\inf(\tilde{M})$ und $\sup(\tilde{M})$ – wenn sie existieren – nicht Element von \tilde{M} zu sein brauchen.

Diesen Sachverhalt verdeutlicht man sich am besten anhand von *Hasse-Diagrammen*: Man trägt alle Elemente der Menge M in der Zeichenebene auf, s_i wird unterhalb von s_j gezeichnet und durch einen Strich mit s_j verbunden, wenn $s_i \leq s_j$. Der Strich wird weggelassen, wenn s_i über andere Punkte mit s_j verbunden ist.

Beispiel: Die linke Hälfte von Bild 2.17 zeigt ein Hasse-Diagramm einer partiell geordneten Menge mit zwei maximalen Elementen, keinem größten und einem kleinsten Element; das Diagramm in der rechten Bildhälfte stellt eine partiell geordnete Menge mit einem größten Element, keinem kleinsten aber zwei minimalen Elementen dar.

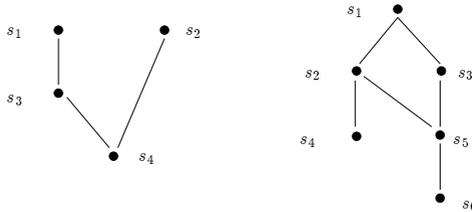


Bild 2.17: Hasse-Diagramme.

Äquivalenzrelationen: Eine Binärrelation \tilde{A} auf einer Menge M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Eine Äquivalenzrelation bewirkt eine Unterteilung der Menge M in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen – die sogenannten *Äquivalenzklassen*. Die Menge dieser Äquivalenzklassen nennt man die *Quotientenmenge* M/\tilde{A} . Die Abbildung $p_{\tilde{A}} : M \rightarrow M/\tilde{A}$, die jedem Element aus M seine Äquivalenzklasse zuordnet, heißt *Projektion* oder *kanonische Abbildung*. Da der Äquivalenzbegriff im folgenden von zentraler Bedeutung sein wird, betrachten wir zur Verdeutlichung des Sachverhalts ein einfaches Beispiel:

Beispiel: Gegeben sei eine Menge M geometrischer Gebilde, die sich im Hinblick auf ihre Form (Ellipse, Rechteck oder Sechseck), ihre Größe (groß oder klein) und ihre Farbe (weiß oder schwarz) unterscheiden (Bild 2.18). Betrachten wir zunächst die Funktion „Form“:

$$\text{Form} : M \rightarrow \{\text{Ellipse, Rechteck, Sechseck}\}.$$

Offenbar wird durch diese Funktion eine Äquivalenzrelation $\tilde{A}(\text{Form})$ induziert:

$$s_1 \tilde{A}(\text{Form}) s_2 \iff \text{Form}(s_1) = \text{Form}(s_2).$$

Sie unterteilt M in drei nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen)

$$[\text{Ellipse}] := \{s \in M \mid \text{Form}(s) = \text{Ellipse}\}$$

$$[\text{Rechteck}] := \{s \in M \mid \text{Form}(s) = \text{Rechteck}\}$$

$$[\text{Sechseck}] := \{s \in M \mid \text{Form}(s) = \text{Sechseck}\}$$

– die Mengen aller Ellipsen, Rechtecke und Sechsecke in M (vgl. Bild 2.18). Als Quotientenmenge erhalten wir in diesem Beispiel

$$M/\tilde{A}(\text{Form}) = \{[\text{Ellipse}], [\text{Rechteck}], [\text{Sechseck}]\}.$$

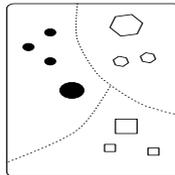


Bild 2.18: Beispiel zum Begriff der Äquivalenzrelation.

Die Menge aller Äquivalenzrelationen auf einer gegebenen Menge M bezeichnen wir mit \mathcal{A} . Auf dieser Menge kann man eine partielle Ordnung \leq definieren: $\check{A}_1 \leq \check{A}_2$ bedeutet „die Äquivalenzrelation \check{A}_1 bewirkt eine mindestens so feine Unterteilung von M wie \check{A}_2 “ bzw. „ \check{A}_1 ist mindestens so fein wie \check{A}_2 “ – oder formal ausgedrückt:

$$s_1 \check{A}_1 s_2 \implies s_1 \check{A}_2 s_2.$$

Weiterhin läßt sich zeigen, daß jede Teilmenge in \mathcal{A} ein Infimum (größte untere Schranke) besitzt – für jede Menge von Äquivalenzrelationen auf M existiert also eine (eindeutig bestimmte) gröbste Äquivalenzrelation, die mindestens so fein wie jedes Element dieser Menge ist. Veranschaulichen wir auch diesen Sachverhalt wieder anhand unseres Beispiels:

Beispiel: Aus Bild 2.18 wird unmittelbar klar, daß \check{A} (Form) feiner ist als die durch die Funktion „Farbe“ induzierte Äquivalenzrelation \check{A} (Farbe): zwei Elemente der Menge M mit gleicher Form besitzen auch dieselbe Farbe. Andererseits kann man keine derartige Beziehung zwischen der Äquivalenzrelation \check{A} (Größe) und \check{A} (Form) bzw. \check{A} (Farbe) angeben. Das Infimum aller drei Äquivalenzrelationen wird in diesem Beispiel durch \check{A} (Fo&G) gegeben – der Äquivalenzrelation, die alle Gebilde derselben Form *und* derselben Größe zu einer Äquivalenzklasse zusammenfaßt. Die (partielle) Ordnung zwischen Elementen von \mathcal{A} wird – wie in Bild 2.19 gezeigt – in Form eines „Baumes“ (oder Hasse-Diagrammes) dargestellt.

Mit diesem einfachen „Handwerkszeug“ lassen sich bereits viele Aspekte mengendynamischer Systeme untersuchen. Die folgenden Ausführungen sind im wesentlichen den Anfangskapiteln von [40] entnommen.

2.3.2.2 Definition mengendynamischer Systeme

Ein deterministisches *mengendynamisches System* wird durch die folgenden Bestandteile definiert:

1. Eine mit einer vollständigen Ordnung \leq versehene *Indermenge* \mathbb{T} , die wir als „Zeit“ interpretieren können,
2. eine *Eingangsmenge* U ,

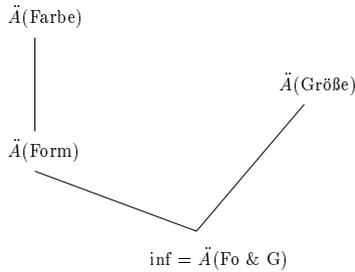


Bild 2.19: Partielle Ordnung von Äquivalenzrelationen.

3. eine *Ausgangsmenge* Y ,
4. eine *Zustandsmenge* X ,
5. eine (partielle) *Transitionsfunktion* $f : X \times U \rightarrow X$,
6. eine *Ausgangsfunktion* $q : X \rightarrow Y$ und
7. eine eindeutige ordnungserhaltende *Indexfunktion* $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}$. (t wird als ordnungserhaltend bezeichnet, wenn für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ aus $k_1 \leq k_2$ folgt, daß $t(k_1) \leq t(k_2)$. Das erste der beiden \leq -Symbole steht hierbei für die „gewöhnliche“ „kleiner oder gleich“-Ordnung auf \mathbb{N} , das zweite für die Ordnung auf \mathbb{T} .) Um die Verbindung zur „Standardnotation“ herzustellen, schreiben wir t_k statt $t(k)$.

Die Systemdynamik wird dann in gewohnter Weise durch Zustands- und Ausgangsgleichung beschrieben:

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k)) \quad (2.21)$$

$$y(t_k) = q(x(t_k)). \quad (2.22)$$

Ein solches mengendynamisches System

$$(\mathbb{T}, \leq; U; X; Y; f, q)$$

stellt offenbar ein sehr allgemeines Konzept dar – wir haben keinerlei Annahmen über Eingangs-, Ausgangs- oder Zustandsmenge getroffen. Sind alle

diese Mengen endlich, erhält man einen sequentiellen Moore-Automaten bzw. – wenn man eine etwas allgemeinere Ausgangsfunktion $q : X \times U \rightarrow Y$ zuläßt – einen sequentiellen Mealy-Automaten. Wählt man U, X, Y als $\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$, so gelangt man zu „gewöhnlichen“ kontinuierlichen Systemen. Durch Einführen geeigneter Mengen kann man natürlich auch allgemeine hybride Systeme im Rahmen dieser Darstellung fassen.

2.3.2.3 Modellvereinfachung

Nun wenden wir uns der Frage zu, wann wir ein gegebenes mengendynamisches System durch ein einfacheres ersetzen können. Die Motivation hierzu liefert uns das zweite der im vorangehenden Abschnitt untersuchten Beispiele. Dort beobachteten wir, daß sich die Ausgangssequenzen mancher Systeme mit kontinuierlicher Zustandsmenge durch Systeme mit endlicher diskreter Zustandsmenge – endliche Automaten – reproduzieren lassen. Da das behandelte Beispiel ein autonomes System darstellte (wir betrachteten den geschlossenen Kreis), beschränken wir uns auch an dieser Stelle auf autonome Systeme. Zustands- und Ausgangsgleichung (2.21), (2.22) vereinfachen sich dann zu:

$$x(t_{k+1}) = \alpha(x(t_k)), \quad x \in X, \quad (2.23)$$

$$y(t_k) = q(x(t_k)), \quad y \in Y. \quad (2.24)$$

Die Funktionen $q, q \circ \alpha, q \circ \alpha^2, \dots$ induzieren Äquivalenzrelationen

$$\check{A}(q), \check{A}(q \circ \alpha), \check{A}(q \circ \alpha^2), \dots \quad (2.25)$$

Das Infimum aller dieser Äquivalenzrelationen bezeichnen wir mit $\check{A}_{q\alpha}$:

$$\check{A}_{q\alpha} := \inf_{i=0,1,2,\dots} \check{A}(q \circ \alpha^i). \quad (2.26)$$

Offensichtlich gilt nun:

$$\begin{aligned} x \check{A}_{q\alpha} \tilde{x} &\implies q(x) = q(\tilde{x}) \\ &\quad q \circ \alpha(x) = q \circ \alpha(\tilde{x}) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

d.h. zwei im Sinne von $\check{A}_{q\alpha}$ äquivalente Anfangszustände generieren dieselbe Folge von Ausgangssymbolen. Da $\check{A}_{q\alpha}$ als *größte* Äquivalenzrelation definiert

wurde, die mindestens so fein wie alle $\check{A}(q \circ \alpha^i)$, $i = 0, 1, \dots$, ist, gilt auch der Umkehrschluß: Produzieren zwei Anfangszustände „für alle Zukunft“ identische Ausgangssymbole, so sind sie äquivalent im Sinne von $\check{A}_{q\alpha}$.

Die folgenden drei Aussagen sind also gleichbedeutend:

1. $\check{A}_{q\alpha}$ ist nicht die Identität (es existieren demzufolge $x \neq \tilde{x}$ mit $x \check{A}_{q\alpha} \tilde{x}$).
2. Man kann nicht garantieren, daß sich aus der Sequenz der Ausgangssymbole der Anfangszustand eindeutig rekonstruieren läßt – das System ist nicht beobachtbar.
3. Man kann alle im Sinne von $\check{A}_{q\alpha}$ äquivalenten Zustände zusammenfassen und auf diese Art und Weise ein einfacheres System mit identischem Ausgangsverhalten erzeugen: Man ersetzt also die Zustandsmenge X durch die Quotientenmenge $X/\check{A}_{q\alpha}$ und die Transitions- und Ausgangsfunktion durch die (eindeutig definierten) Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &: X/\check{A}_{q\alpha} \longrightarrow X/\check{A}_{q\alpha} \\ \bar{q} &: X/\check{A}_{q\alpha} \longrightarrow Y, \end{aligned}$$

die das in Bild 2.20 gezeigte Diagramm kommutativ werden lassen.

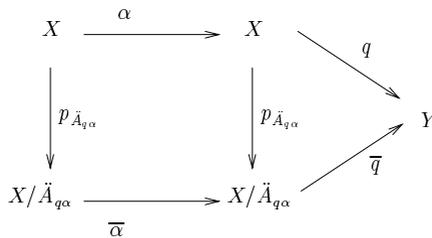


Bild 2.20: Schematische Darstellung der exakten Modellvereinfachung.

Für Transitions- und Ausgangsfunktion des vereinfachten autonomen Systems

$$(\mathbb{T}, \leq; X/\check{A}_{q\alpha}; Y; \bar{\alpha}, \bar{q})$$

gilt also:

$$\begin{aligned}\bar{q} \circ p_{A_{q\alpha}} &= q \\ \bar{\alpha} \circ p_{A_{q\alpha}} &= p_{A_{q\alpha}} \circ \alpha.\end{aligned}$$

Diese Ausführungen lassen sich problemlos auf das in Abschnitt 2.3.1.2 betrachtete Beispiel anwenden:

Beispiel: Die Zustandsmenge X des geregelten Systems besteht aus den Seiten des in Bild 2.13 dargestellten Dreiecks. Als Ausgangsgröße interpretieren wir die Position des Abflußstutzens. Man kann sich nun leicht davon überzeugen (z.B. anhand des in Bild 2.16 gezeigten Verlaufs der Trajektorien), daß zwei Anfangszustände genau dann dieselbe Folge von Ausgangssymbolen bewirken, wenn sie zur selben Hälfte einer Dreiecksseite gehören. $\dot{A}_{q\alpha}$ unterteilt X also in sechs Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &:= \left\{ \xi \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1, \xi_1 = 0, 0 < \xi_2 < \xi_3 \right\} \\ \bar{x}_2 &:= \left\{ \xi \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1, \xi_1 = 0, \xi_2 \geq \xi_3 \geq 0 \right\} \\ \bar{x}_3 &:= \left\{ \xi \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1, \xi_2 = 0, 0 < \xi_3 < \xi_1 \right\} \\ \bar{x}_4 &:= \left\{ \xi \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 \geq \xi_1 \geq 0 \right\} \\ \bar{x}_5 &:= \left\{ \xi \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1, \xi_3 = 0, 0 < \xi_1 < \xi_2 \right\} \\ \bar{x}_6 &:= \left\{ \xi \mid \sum_{i=1}^3 \xi_i = 1, \xi_3 = 0, \xi_1 \geq \xi_2 \geq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Die Zustandsmenge des vereinfachten Systems lautet

$$X/\dot{A}_{q\alpha} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6\},$$

Transitions- und Ausgangsfunktion sind in Tabelle 2.1 dargestellt. Offenbar wird je nach Anfangsbedingung einer der bei-

\bar{x}	$\bar{\alpha}(\bar{x})$	$\bar{q}(\bar{x})$
\bar{x}_1	\bar{x}_5	3
\bar{x}_2	\bar{x}_4	2
\bar{x}_3	\bar{x}_1	1
\bar{x}_4	\bar{x}_6	3
\bar{x}_5	\bar{x}_3	2
\bar{x}_6	\bar{x}_2	1

Tabelle 2.1: Transitions- und Ausgangsfunktion des vereinfachten Systems.

den in Bild 2.21 gezeigten Zyklen durchlaufen; hierbei wird eine „auf-“ oder eine „abwärtszählende“ periodische Ausgangssequenz erzeugt.

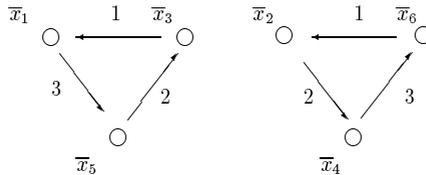


Bild 2.21: Vereinfachtes Modell.

Betrachtet man nicht-autonome Systeme, so muß man fordern, daß die genannten Bedingungen für jede mögliche Eingangsgröße gelten.

2.4 Diskrete Approximation kontinuierlicher und hybrider Systeme

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß es *prinzipiell* möglich ist, das Verhalten eines kontinuierlichen (oder hybriden) Systems *exakt* durch einen Automaten zu reproduzieren; gleichzeitig wurde aber klar, daß hierfür überaus restriktive Bedingungen zutreffen müssen: Man unterteilt die Zustandsmenge

des zu reduzierenden dynamischen Modells in endlich (oder abzählbar unendlich) viele „Gebiete“ (Äquivalenzklassen) und fordert dann, daß die Transitionsfunktion *jedes* dieser Gebiete *vollständig* in eine andere Äquivalenzklasse abbildet. In anderen Worten: Bei Eingabe eines beliebig ausgewählten Stellsignals müssen alle Punkte eines vorgegebenen Gebiets der Zustandsmenge innerhalb eines Abtastintervalls in ein einziges „Folgegebiet“ wandern. Es ist unmittelbar klar, daß diese Bedingung nur in ausgewählten Fällen (wie dem Beispielsystem „Schaltender Ablauf“) zutrifft. Aus diesem Grund befassen wir uns nun mit der Frage, wie wir uns eine der Reduktionsbedingung (2.10) genügende diskrete *Approximation* oder *Abstraktion* des hybriden Streckenmodells beschaffen können.

2.4.1 Die Regelstrecke

Wir nehmen an, daß zur Beschreibung der Regelstrecke ein detailliertes „Basismodell“ zur Verfügung steht. Dieses Modell besitzt eine kontinuierliche Komponente und kann darüberhinaus auch einen diskreten Anteil enthalten. Die kontinuierliche Komponente werde durch die Zustands-Differenzengleichung (2.27), die Ausgangsgleichung (2.28) und die Meßgleichung (2.29) beschrieben:

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), w(t_k), u_d(t_k)), \quad (2.27)$$

$$z_d(t_k) = q_z(x(t_k)), \quad (2.28)$$

$$y_d(t_k) = q_y(x(t_k)). \quad (2.29)$$

$k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ist der Zeitindex, $x(t_k) \in \mathbb{R}^n$ der Zustand der kontinuierlichen Komponente zum Zeitpunkt t_k , und $w(t_k) \in \mathbb{R}^r$ eine unbekannte (aber beschränkte) Störgröße:

$$w(t_k) \in W := \{w \mid w \in \mathbb{R}^r, \|w\|_\infty \leq 1\}, \quad (2.30)$$

$\|w\|_\infty$ steht für die Maximumnorm des Vektors w : $\|w\|_\infty := \max_i |w_i|$. $u_d(t_k) \in U_d$, $z_d(t_k) \in Z_d$, und $y_d(t_k) \in Y_d$ sind die Werte (Symbole), die Eingangs-, Ausgangs- und Meßsignal zum Zeitpunkt t_k annehmen. Wir setzen voraus, daß die Eingangsgröße $u_d(t_k)$ gemessen werden kann – im Falle eines rein kontinuierlichen Streckenmodells (der unten beschriebene diskrete Anteil entfällt) übernimmt u_d die Rolle der Stellvariablen. Die Festlegung der Ausgangsgröße z_d ist Teil des Entwurfsprozesses. Wenn uns beispielsweise nur die Eigenschaft „Sicherheit“ interessiert, wählen wir als Wertebereich

der Ausgangsabbildung q_z die Menge $Z_d = \{\text{verboten, erlaubt}\}$. Es wird im folgenden immer vorausgesetzt, daß die Mengen U_d , Z_d und Y_d aus endlich vielen Elementen bestehen:

$$\begin{aligned} U_d &= \{u_d^{(1)}, \dots, u_d^{(N)}\}, \\ Z_d &= \{z_d^{(1)}, \dots, z_d^{(K)}\}, \\ Y_d &= \{y_d^{(1)}, \dots, y_d^{(M)}\}. \end{aligned}$$

Einzig von der Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times U_d \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu erfüllende Forderung ist, daß ihre Restriktion auf \mathbb{R}^n invertiert werden kann. Deshalb können wir (2.27) nach dem ersten Argument der rechten Seite auflösen; das Resultat nennen wir $x(t_k) = \tilde{f}^{-1}(x(t_{k+1}), w(t_k), u_d(t_k))$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir weiterhin an, daß sowohl Ausgangsabbildung $q_z : \mathbb{R}^n \rightarrow Z_d$ als auch Meßfunktion $q_y : \mathbb{R}^n \rightarrow Y_d$ surjektiv sind⁴.

Den diskreten Streckenanteil modellieren wir als *Moore Automaten* mit Transitionsfunktion δ und Ausgangsabbildung q_u :

$$\xi_d(t_{k+1}) = \delta(\xi_d(t_k), y_d(t_k), \tilde{u}_d(t_k)), \quad (2.31)$$

$$u_d(t_k) = q_u(\xi_d(t_k)). \quad (2.32)$$

$\xi_d(t_k) \in \Xi_d$ stellt den Zustand der diskreten Komponente zum Zeitpunkt t_k dar; ihre Zustandsmenge Ξ_d wird als endlich vorausgesetzt. Der Ausgang u_d des diskreten Streckenanteils dient als Eingangssignal für die kontinuierliche Komponente; umgekehrt bildet der gemessene Ausgang y_d des kontinuierlichen Blocks das (interne) Eingangssignal des Moore Automaten. Von außen kann in das System über die (externe) Eingangsgröße $\tilde{u}_d(t_k) \in \tilde{U}_d$ eingegriffen werden – sie ist die Stellvariable des Gesamt-Streckenmodells. (Bild 2.22).

2.4.2 Nichtdeterministische Automaten als diskrete Abstraktionen kontinuierlicher Systeme

2.4.2.1 Das Prinzip

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich eine Hierarchie (eine vollständig geordnete Menge) nichtdeterministischer Automaten als Abstraktionen des

⁴Sollte diese Bedingung nicht erfüllt sein, enthalten die entsprechenden Bildmengen „unnötig“ viele Elemente. Die „überzähligen“ Elemente entfernt man und erhält so – wie vorausgesetzt – Surjektivität der Abbildungen q_z und q_y .

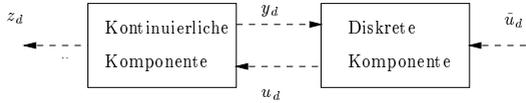


Bild 2.22: „Basismodell“ für die hybride Regelstrecke.

kontinuierlichen Streckenanteils bestimmen läßt. Zuerst wählt man eine nichtnegative ganze Zahl v – diese parametrisiert die Menge der Abstraktionen. Dann definieren wir den Zustand der diskreten Abstraktion zum Zeitpunkt t_k als

$$x_d(t_k) := \begin{cases} ([y_d(t_k), \dots, y_d(t_0)], [u_d(t_{k-1}), \dots, u_d(t_0)]), & \text{wenn } k = 0, 1, \dots, v-1, \\ ([y_d(t_k), \dots, y_d(t_{k-v})], [u_d(t_{k-1}), \dots, u_d(t_{k-v})]), & \text{wenn } k \geq v. \end{cases} \quad (2.33)$$

Der momentane Zustand des abstrahierten Modells besteht also aus einer Kette von Meßsymbolen und (meßbaren) Eingangssymbolen, die über ein Intervall $\min(k, v)$ in die Vergangenheit zurückreichen. Diese Wahl der Zustandsgröße erinnert an die Beobachter-Normalform der klassischen kontinuierlichen Regelungstheorie – der Modellzustand besteht ausschließlich aus bekannten Größen. Beobachtbarkeit des Zustands ist deswegen a-priori gesichert. Da die Mengen U_d und Y_d nur endlich viele Eingangs- bzw. Meßsymbole enthalten, besteht auch die Zustandsmenge X_d der diskreten Approximation aus endlich vielen Elementen. Eine obere Schranke \bar{N}_v für die Anzahl der Elemente in X_d läßt sich leicht angeben:

$$\bar{N}_v = \sum_{i=0}^v M^{i+1} N^i .$$

Dies ist gerade die Anzahl verschiedener Symbolketten (2.33), die man durch vollständige Permutation der Eingangs- und der Meßsymbole über U_d bzw. Y_d erhält.

Es liegt aber auf der Hand, daß das kontinuierliche System (2.27), (2.29) nicht mit *allen* diesen Zeichenketten kompatibel ist. In einem zweiten Schritt

eliminiert man deswegen alle Ketten, die sich nicht mit dem kontinuierlichen Modell (2.27), (2.29) und den Annahmen bezüglich des Störsignals w vereinbaren lassen: Nach Einführung der Abkürzung $\tilde{f}_k^{-1}(x, w)$ für den Term $\tilde{f}^{-1}(x, w, u_d^{(k)})$ ergibt sich hierfür folgendes Kriterium: Die Zeichenkette $\left(\left[y_d^{(i_0)}, \dots, y_d^{(i_\rho)} \right], \left[u_d^{(k_1)}, \dots, u_d^{(k_\rho)} \right] \right)$, $0 \leq \rho \leq v$, ist genau dann Element der Zustandsmenge X_d des abstrahierten Modells, wenn das Gleichungssystem

$$y_d^{(i_0)} = q_y(x) \quad (2.34)$$

$$y_d^{(i_1)} = q_y \left(\tilde{f}_{k_1}^{-1}(x, w_{j_1}) \right) \quad (2.35)$$

$$y_d^{(i_2)} = q_y \left(\tilde{f}_{k_2}^{-1} \left(\tilde{f}_{k_1}^{-1}(x, w_{j_1}), w_{j_2} \right) \right) \quad (2.36)$$

⋮

$$y_d^{(i_\rho)} = q_y \left(\tilde{f}_{k_\rho}^{-1} \dots \left(\tilde{f}_{k_1}^{-1}(x, w_{j_1}), \dots, w_{j_\rho} \right) \right) \quad (2.37)$$

unter der Nebenbedingung

$$\|w_{j_l}\|_\infty \leq 1, \quad l = 1, \dots, \rho, \quad (2.38)$$

eine nichtleere Lösungsmenge für den Vektor $[x', w'_{j_1}, \dots, w'_{j_\rho}]'$ besitzt. Ein solch allgemeines System nichtlinearer Gleichungen auf Lösbarkeit zu untersuchen ist natürlich etwas ehrgeizig. In einem wichtigen Spezialfall läßt sich diese Untersuchung allerdings leicht und numerisch problemlos durchführen – dieser wird in Abschnitt 2.4.2.2 besprochen.

Der eben skizzierte zweite Schritt läßt sich als „Ausjäten“ aller nicht erreichbarer Zustände interpretieren. Da alle Zustände – per Konstruktion – beobachtbar sind, garantiert diese Vorgehensweise Minimalität des resultierenden (diskreten) Modells. Die Anzahl der Elemente der verbleibenden (minimalen) Zustandsmenge X_d bezeichnen wir mit N_v :

$$X_d := \{x_d^{(1)}, \dots, x_d^{(N_v)}\}. \quad (2.39)$$

Die Menge der Anfangszustände $X_{d0} \subset X_d$ besteht aus allen Zeichenketten, die genau ein Meßsymbol (und kein Stellsymbol) enthalten: $X_{d0} = Y_d$. Dies spiegelt die Tatsache wider, daß wir kein a-priori Wissen bezüglich des Zustands des kontinuierlichen Systems voraussetzen: Er kann vor Bekanntwerden des ersten Meßsymbols zum Zeitpunkt t_0 jeden Wert im \mathbb{R}^n annehmen.

Wir bezeichnen die zu einem diskreten Zustand $x_d^{(i)}$ gehörigen Ketten von Eingangs- und Meßsymbolen mit $u^*(x_d^{(i)})$ und $y^*(x_d^{(i)})$. Außerdem führen

wir einen „Vergessens-Operator“ \mathcal{F} ein, der für $k \geq v$ das jeweils „älteste“ Symbol aus den Zeichenketten $y_d^*(x_d(t_k))$ und $u_d^*(x_d(t_k))$ entfernt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y_d^*(x_d(t_k))) &:= \begin{cases} [y_d(t_k), \dots, y_d(t_0)], & \text{wenn } k = 0, 1, \dots, v-1 \\ [y_d(t_k), \dots, y_d(t_{k-v+1})], & \text{wenn } k \geq v, \end{cases} \\ \mathcal{F}(u_d^*(x_d(t_k))) &:= \begin{cases} [u_d(t_{k-1}), \dots, u_d(t_0)], & \text{wenn } k = 0, 1, \dots, v-1 \\ [u_d(t_{k-1}), \dots, u_d(t_{k-v+1})], & \text{wenn } k \geq v. \end{cases} \end{aligned}$$

Nun kann man sofort die Transitionsstruktur der diskreten Abstraktion angeben: $(x_d^{(i)}, u_d^{(j)}, x_d^{(k)})$ ist genau dann eine Transition, wenn

1. ein Symbol $y_d^{(l)} \in Y_d$ existiert, so daß

$$y_d^*(x_d^{(k)}) = \left[y_d^{(l)}, \mathcal{F}(y_d^*(x_d^{(i)})) \right], \quad (2.40)$$

$$u_d^*(x_d^{(k)}) = \left[u_d^{(j)}, \mathcal{F}(u_d^*(x_d^{(i)})) \right], \quad (2.41)$$

2. die Symbolkette $\left(\left[y_d^{(l)}, y_d^*(x_d^{(i)}) \right], \left[u_d^{(j)}, u_d^*(x_d^{(i)}) \right] \right)$ mit dem kontinuierlichen Modell (2.27), (2.29) und den Annahmen bezüglich des Störsignals w vereinbar ist.

Die erste der beiden Bedingungen läßt sich leicht durch „visuellen Vergleich“ der untersuchten Symbolketten überprüfen: Man muß sich lediglich vergewissern, daß sowohl $y_d^*(x_d^{(k)})$ und $y_d^*(x_d^{(i)})$ als auch $u_d^*(x_d^{(k)})$ und $u_d^*(x_d^{(i)})$ in der durch (2.40) und (2.41) angedeuteten Art und Weise „überlappen“. Die zweite Bedingung läßt sich überprüfen, indem man einen dem System (2.34) – (2.38) analogen Satz von Gleichungen aufstellt und auf Lösbarkeit testet.

Erweist sich $(x_d^{(i)}, u_d^{(j)}, x_d^{(k)})$ als Transition der Abstraktion, so bezeichnet man $x_d^{(i)}$ als Ausgangs-, $x_d^{(k)}$ als Endzustand dieser Transition. Das Eingangssymbol $u_d^{(j)}$ wird auch als Transitionsmarke bezeichnet.

Jedes Element in X_d generiert auf eindeutige Weise eine symbolische Meßgröße – das dem Zustand $x_d^{(i)}$ zugeordnete Meßsymbol ist gerade das „am weitesten links“ stehende Zeichen der Kette $y^*(x_d^{(i)})$. Für jeden nichtnegativen Wert des ganzzahligen Parameters v erhält man demzufolge einen endlichen Moore-Automaten als diskrete Abstraktion der kontinuierlichen Streckenkomponente.

Es liegt auf der Hand, daß der resultierende Automat in aller Regel nicht-deterministischen Charakter besitzt: Mehrere von einem Zustand ausgehende

Transitionen können mit derselben Marke gekennzeichnet sein. Diese Eigenschaft wird in nachstehendem Beispiel illustriert und in Abschnitt 2.4.3 näher erklärt.

Der Begriff der *Zeit* findet sich nur *implizit* im Automatenmodell: Der Zeittakt der diskreten Abstraktion stimmt mit dem des unterlagerten kontinuierlichen Systems überein – für jede Transition wird genau ein Abtastintervall $t_{i+1} - t_i$ benötigt – man spricht in diesem Zusammenhang von einem *getakteten Automaten*. In manchen Fällen muß die Zeit allerdings *explizit* modelliert werden – beispielsweise, wenn die Spezifikation die Ausführung bestimmter Aufgaben innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne verlangt. Dann erweitert man die Transitionsstruktur des Automaten durch eine einfache *Uhr* (Bild 2.23): Das als *tick* bezeichnete Ereignis symbolisiert den Ablauf

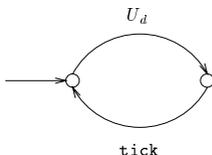


Bild 2.23: Einfache Uhr.

eines Abtastintervalls. Der mit U_d versehene Pfeil repräsentiert das Einspeisen eines beliebigen Eingangssymbols $u_d \in U_d$. Jedes aufeinanderfolgende Auftreten von Eingangssymbolen wird also durch ein *tick* Ereignis unterbrochen. Das gesamte abstrahierte Modell besteht in diesem Fall aus dem synchronen Produkt (vgl. Abschnitt 2.5.2.2) von Automat und Uhr.

Beispiel: Wir betrachten ein System mit jeweils zwei Meß- und zwei Stellsymbolen ($M = 2$, $N = 2$). Den Entwurfparameter v wählen wir zu 1. Als obere Schranke für die Anzahl der Zustände des approximierenden Automaten ergibt sich somit $\bar{N}_v = 2 + 2^2 \cdot 2 = 10$. Im vorliegenden Beispiel sei die Zahl der mit dem unterlagerten kontinuierlichen System kompatiblen Zustände $N_v = 8$, d.h. nur 8 von 10 Varianten des (Un-) Gleichungssystems (2.34) – (2.38) besitzen eine nichtleere Lösungsmenge. Eine Minimalrealisierung der diskreten Approximation

enthält folglich 8 Zustände. In unserem Beispiel seien dies:

$$\begin{aligned} x_d^{(1)} &:= [y_d^{(1)}], \\ x_d^{(2)} &:= [y_d^{(2)}], \\ x_d^{(3)} &:= [[y_d^{(1)}, y_d^{(1)}], u_d^{(1)}], \\ x_d^{(4)} &:= [[y_d^{(1)}, y_d^{(1)}], u_d^{(2)}], \\ x_d^{(5)} &:= [[y_d^{(1)}, y_d^{(2)}], u_d^{(2)}], \\ x_d^{(6)} &:= [[y_d^{(2)}, y_d^{(1)}], u_d^{(1)}], \\ x_d^{(7)} &:= [[y_d^{(2)}, y_d^{(2)}], u_d^{(1)}], \\ x_d^{(8)} &:= [[y_d^{(2)}, y_d^{(2)}], u_d^{(2)}]. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Transitionsstruktur muß man die auf Seite 44 aufgeführten Bedingungen überprüfen. Im vorliegenden Beispiel sei angenommen, daß jede potentielle Transition, die Bedingung 1 genügt, auch Bedingung 2 erfüllt. Dann ergibt sich die in der linken Hälfte von Bild 2.24 aufgetragene Struktur. Anfangs-

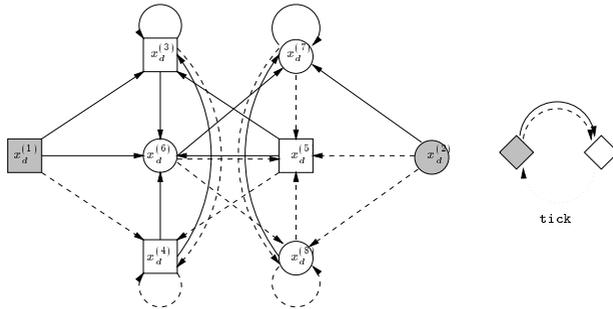


Bild 2.24: Moore Automat (links) und Uhr (rechts).

zustände sind schraffiert gezeigt; mit dem Meßsymbol $y_d^{(1)}$ versehene Zustände sind als Quadrate gezeichnet. Zustände, die ein $y_d^{(2)}$ -Symbol hervorbringen, als Kreise. Mit $u_d^{(1)}$ markierte Transi-

tionen werden mittels durchgezogener Linien charakterisiert, $u_d^{(2)}$ -Transitionen durch unterbrochene Linien. Dieselbe Konvention gilt auch für die in der rechten Hälfte von Bild 2.24 gezeigte Uhr.

2.4.2.2 Die numerische Vorgehensweise

Im nachfolgend beschriebenen Spezialfall läßt sich der einzige rechentechisch potentiell anspruchsvolle Schritt des Abstraktionsprozesses – das Eliminieren nicht erreichbarer Zustände der diskreten Approximation – auf eine numerisch einfache und zuverlässige Prozedur reduzieren. Dieser Fall zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

1. Die rechte Seite der Zustands-Differenzgleichung (2.27) ist affin im Zustand $x(t_k)$ und dem (unbekannten) Störvektor $w(t_k)$:

$$x(t_{k+1}) = a(y_d(t_k), u_d(t_k))x(t_k) + g(y_d(t_k), u_d(t_k)) + h(y_d(t_k), u_d(t_k))w(t_k); \quad (2.42)$$

2. die Meßabbildung $q_y : \mathbb{R}^n \rightarrow Y_d$ lautet:

$$q_y = Q_y \circ C_y; \quad (2.43)$$

$C_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist eine lineare Abbildung (d.h. eine reelle $p \times n$ -Matrix), und der „Quantisierer“ $Q_y : \mathbb{R}^p \rightarrow Y_d$ unterteilt den Raum \mathbb{R}^p in endlich viele paarweise disjunkte quaderförmige Gebilde, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen angeordnet sind.

Man sagt, (2.42) – (2.43) besitze (nichtlineare) Beobachterform: Da sowohl $y_d(t_k)$ als auch $u_d(t_k)$ bekannte (gemessene) Größen sind, kennt man auch die Ausdrücke $a(y_d(t_k), u_d(t_k))$, $g(y_d(t_k), u_d(t_k))$ und $h(y_d(t_k), u_d(t_k))$.

Man betrachte das zu einem Meßsymbol $y_d^{(i)}$ gehörige quaderförmige Quantisierungsgebiet und bezeichne die vektoriellen Ober- bzw. Untergrenzen mit $\hat{y}^{(i)}$ und $\check{y}^{(i)}$:

$$\check{y}^{(i)} <_c \{ \zeta | Q_y(\zeta) = y_d^{(i)} \} \leq_c \hat{y}^{(i)};$$

„ $<_e$ “ und „ \leq_e “ stehen hierbei für „elementweise kleiner“ bzw. „elementweise kleiner oder gleich“:

$$\zeta <_e \tilde{\zeta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \zeta_1 < \tilde{\zeta}_1 \\ \vdots \\ \zeta_p < \tilde{\zeta}_p \end{bmatrix},$$

$$\zeta \leq_e \tilde{\zeta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \zeta_1 \leq \tilde{\zeta}_1 \\ \vdots \\ \zeta_p \leq \tilde{\zeta}_p \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren $\hat{y}^{(i)}$ und $\check{y}^{(i)}$ können $+\infty$ bzw. $-\infty$ als Elemente enthalten. Die Lösung des (Un-) Gleichungssystems (2.34) – (2.38), das sich im vorliegenden Spezialfall für $\rho = 0$ ergibt, ist trivial und braucht nicht näher betrachtet zu werden. Für $\rho \geq 1$ definiert man die Vektoren

$$\hat{y}_P := \begin{bmatrix} \hat{y}^{(i_1)} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(i_\rho)} \end{bmatrix}$$

$$\check{y}_P := \begin{bmatrix} \check{y}^{(i_1)} \\ \vdots \\ \check{y}^{(i_\rho)} \end{bmatrix}$$

$$g_P := \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_\rho \end{bmatrix}$$

$$w_P := \begin{bmatrix} w_{j_1} \\ \vdots \\ w_{j_\rho} \end{bmatrix}$$

– man „sammelt“ die „Anregungsterme“ $g_1 := g(y_d^{(i_1)}, u_d^{(k_1)}), \dots, g_\rho := g(y_d^{(i_\rho)}, u_d^{(k_\rho)})$ in g_P und die (unbekannten) Störgrößen $w_{j_1}, \dots, w_{j_\rho}$ in w_P . Schließlich

führt man die Bezeichnungen 1_r und I_r für den Spaltenvektor mit ρr „Einsen“ bzw. die (ρr) -dimensionale Einheitsmatrix ein. Die Kette aus Meß- und Eingangssymbolen $([y_d^{(i_0)}, \dots, y_d^{(i_\rho)}], [u_d^{(k_1)}, \dots, u_d^{(k_\rho)}])$, $1 \leq \rho \leq v$, ist genau dann mit den Modellgleichungen (2.42), (2.29) und (2.43) und der Annahme (2.30) bezüglich der Störungen kompatibel (und damit ein Element in der (minimalen) Zustandsmenge der diskreten Abstraktion), wenn die Lösungsmenge $[x' w'_P]'$ des folgenden *linearen* Ungleichungssystems nichtleer ist:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{y}^{(i_0)} \\ \hat{y}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{PU} \end{bmatrix} g_P <_\epsilon \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ C_y a_1^{-1} & \\ \vdots & \\ C_y \prod_{i=1}^{\rho} a_i^{-1} & \Phi_{PW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_P \end{bmatrix} \\ \leq_\epsilon \begin{bmatrix} \hat{y}^{(i_0)} \\ \hat{y}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{PU} \end{bmatrix} g_P, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$-1_r \leq_\epsilon \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_P \end{bmatrix} \leq_\epsilon 1_r, \quad (2.45)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Phi_{PU} &:= \begin{bmatrix} C_y a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ C_y a_2^{-1} a_1^{-1} & C_y a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_y \prod_{i=1}^{\rho} a_i^{-1} & \dots & \dots & C_y a_\rho^{-1} \end{bmatrix}, \\ \Phi_{PW} &:= -\Phi_{PU} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & h_\rho \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$a_l := a(y_d^{(i_l)}, u_d^{(k_l)}), \quad h_l := h(y_d^{(i_l)}, u_d^{(k_l)}), \quad l = 1, \dots, \rho.$$

\prod steht für „linkes Produkt“ (d.h.: $\prod_{i=1}^{\rho} a_i^{-1} = a_\rho^{-1} \dots a_1^{-1}$). Die Existenz von Lösungen für ein derartiges System von Ungleichungen kann man leicht mit Hilfe des „feasibility-Schritts“ eines jeden Algorithmus zur linearen Programmierung überprüfen.

Falls eine Zeichenkette diesen Test nicht besteht, entspricht sie einem nicht-erreichbaren Zustand der diskreten Abstraktion und wird deshalb eliminiert. Diese Prozedur wiederholt man für alle möglichen Kombinationen von Eingangs- und Ausgangssymbolen. Auf diese Art und Weise entfernt man *alle* nicht erreichbaren Zustände und garantiert – da jeder Zustand per Definition beobachtbar ist – Minimalität der Zustandsmenge der Abstraktion.

In aller Regel muß man nicht alle \tilde{N}_v möglichen Permutationen von Eingangs- und Meßsymbolen separat auf Erreichbarkeit prüfen: Erweist sich beispielsweise der Zustand $([y_d^{(i_0)}, y_d^{(i_1)}], [u_d^{(k_1)}])$ als nicht erreichbar (nicht mit den kontinuierlichen Modellannahmen kompatibel), so können natürlich auch sämtliche Zustände der Form $([y_d^{(i_0)}, y_d^{(i_1)}], \dots, y_d^{(i_\rho)}, [u_d^{(k_1)}, \dots, u_d^{(k_\rho)}])$, $1 < \rho \leq v$, nicht erreicht werden. Beginnt man die vorgestellte Prozedur also bei „kurzen“ Symbolketten und arbeitet sie in Richtung wachsender Kettenlängen ab, läßt sich der numerische Aufwand beträchtlich senken.

Beispiel: In Bild 2.25 sieht man die schematische Darstellung eines am Arbeitsbereich Regelungstechnik der Technischen Universität Hamburg-Harburg aufgebauten Praktikumsversuchs. Das kontinuierliche Modell dieses Beispielsystems stellte *Dr. Ger-*

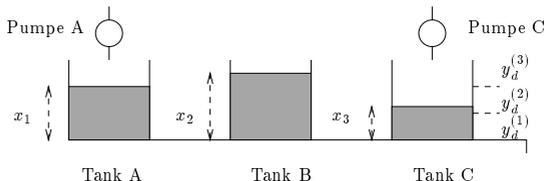


Bild 2.25: Beispiel: Drei-Tank-Praktikumsversuch.

wald Lichtenberg zur Verfügung. Es entspricht den beschriebenen (den betrachteten Spezialfall definierenden) Bedingungen. Die Regelstrecke besteht aus drei miteinander verkoppelten Behältern und zwei Pumpen, die unabhängig voneinander betrieben werden können. Jede Pumpe kann drei symbolische Werte („aus“, „normal“ oder „max“) realisieren. Jedes Symbol entspricht einer genau definierten Förderrate in den entsprechenden Tank.

Die Zeitkonstanten des Systems liegen zwischen 15 und 250 Sekunden. Die Meßinformation beschränkt sich zu jedem Abtastzeitpunkt auf die Aussage, daß der Wasserspiegel in Tank C „hoch“ ($y_d(t_k) = y_d^{(3)}$), „mittel“ ($y_d(t_k) = y_d^{(2)}$) oder „niedrig“ ($y_d(t_k) = y_d^{(1)}$) sei. Die diese Bereiche trennenden Schwellwerte sind exakt definiert. Wählt man das Abtastintervall zu 100 Sekunden und setzt v – die maximale Länge der betrachteten Zeichenketten – zu 1, so erhält man $3 + 3 \cdot 3 \cdot 9 = 84$ verschiedene Kombinationen von Symbolen der Form (2.33). Nur 60 dieser Symbolketten erweisen sich aber als mit dem kontinuierlichen Modell kompatibel und daher als Zustände unserer diskreten Approximation. Ist $v = 2$, so erhält man $3 + 3 \cdot 3 \cdot 9 + 3 \cdot (3 \cdot 9)^2 = 2271$ verschiedene Zeichenketten, von denen sich 775 als Zustände der diskreten Abstraktion qualifizieren.

2.4.3 Diskrete Abstraktionen als Beobachter für den kontinuierlichen Streckenzustand

Per Definition finden sich in der Zustandsmenge X_d der diskreten Approximation nur solche Elemente (nur solche Ketten von Eingangs- und Meßsymbolen), die weder den kontinuierlichen Modellgleichungen (2.27), (2.29) noch den bezüglich des unbekanntenen Störsignals w getroffenen Annahmen widersprechen. Mit anderen Worten: $x_d^{(j)} = ([y_d^{(i_0)}, \dots, y_d^{(i_\rho)}], [u_d^{(k_1)}, \dots, u_d^{(k_\rho)}])$ ist genau dann in der diskreten Zustandsmenge X_d enthalten, wenn ein $x \in \mathbb{R}^n$ sowie Vektoren $w_{j_l} \in \mathbb{R}^r$, $\|w_{j_l}\|_\infty \leq 1$, $l = 1, \dots, \rho$, existieren, so daß ein Einspeisen der Symbolkette $u_d^*(x_d^{(j)})$ zur Ausgabe der in $y_d^*(x_d^{(j)})$ enthaltenen Meßsymbole führt. Dies impliziert die Existenz kontinuierlicher Streckenzustände $x \in \mathbb{R}^n$, die mit den kontinuierlichen Modellgleichungen, dem Störmodell, sowie den Ketten von Eingangs- und Meßsymbolen kompatibel sind. Die (nichtleere) Menge solcher Zustände bezeichnen wir mit $X(x_d^{(j)})$, $j = 1, \dots, N_v$. Sie läßt sich offensichtlich als mengenwertige, auf der Symbolkette $x_d^{(j)}$ basierende Zustandsschätzung der unterlagerten kontinuierlichen Streckenkomponente interpretieren. Eine explizite Berechnung von $X(x_d^{(j)})$ erfolgt durch Projektion der Lösungsmenge $[x', w'_{j_1}, \dots, w'_{j_\rho}]$ von (2.34) – (2.38) auf ihre ersten n Komponenten. Für den in Abschnitt 2.4.2.2 beschriebenen (numerisch besonders einfachen) Spezialfall erhält man Polyeder im \mathbb{R}^n für die Schätzungen $X(x_d^{(j)})$.

Wollen wir die diskrete Abstraktion als Beobachter für den kontinuierlichen Anlagenteil verwenden, so müssen wir beide Systeme parallel betreiben (Bild 2.26): Der kontinuierlichen Komponente wird eine Sequenz von Eingangssymbolen zugeführt, sie antwortet mit einer Kette von Meßsymbolen. Sowohl $u_d(t_k)$ als auch $y_d(t_k)$ dienen als Eingang für die diskrete Abstraktion. Ihr momentaner Zustand $x_d(t_k) \in X_d$ wird durch diese Signale eindeutig bestimmt. Damit liegt natürlich auch die Menge $X(x_d(t_k))$ – die Schätzung des kontinuierlichen Zustands $x(t_k)$ – fest.

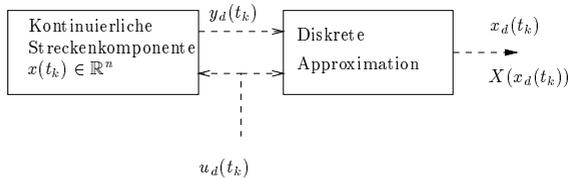


Bild 2.26: Diskrete Abstraktion als Beobachter des kontinuierlichen Anlagenteils.

Offensichtlich gilt

$$\bigcup_{j=1}^{N_e} X(x_d^{(j)}) = \mathbb{R}^n$$

und – in aller Regel –

$$X(x_d^{(i)}) \cap X(x_d^{(j)}) \neq \emptyset.$$

Die Mengen $X(x_d^{(j)})$ überdecken also den kontinuierlichen Zustandsraum anstatt ihn zu *partitionieren*.

In dieser Sichtweise läßt sich auch der der diskreten Approximation innewohnende Nichtdeterminismus leicht erklären: Gäbe es keine unbekannteren Störungen, so würde ein (bekannter) Eingriff $u_d(t_k)$ den Zustand des unterlagerten kontinuierlichen Systems aus dem Punkt $x(t_k) \in \mathbb{R}^n$ auf eindeutige Weise in einen Folgezustand $x(t_{k+1})$ überführen. Ein Zustand $x_d(t_k) = x_d^{(i)}$ der diskreten Abstraktion entspricht hingegen einer Menge $X(x_d^{(i)}) \subset \mathbb{R}^n$. Ein Eingriff $u_d(t_k) = u_d^{(j)}$ bildet diese Menge in eine andere Menge ab.

Nur unter sehr strengen (und praktisch nie erfüllten) Voraussetzungen⁵ ist gewährleistet, daß die „Folgemenge“ ganz in einem einzigen Quantisierungsgebiet $\{x \in \mathbb{R}^n | q_y(x) = y_d^{(i)}\}$ liegt. Ist dies nicht der Fall, so kann das im nächsten Abtastzeitpunkt auftretende Meßsymbol nicht eindeutig vorhergesagt werden – damit läßt sich auch der diskrete Folgezustand nicht mehr eindeutig präzisieren, so daß sich notwendigerweise eine nicht deterministische Transitionsstruktur der diskreten Approximation ergibt. Das Auftreten unbekannter Störungen im kontinuierlichen „Basismodell“ führt lediglich zu einer „Verstärkung“ des Nichtdeterminismus.

In diesem Zusammenhang ist auch leicht ersichtlich, wie die „Größe“ der Mengen $X(x_d^{(j)})$ mit dem in Abschnitt 2.2 eingeführten Begriff der Modellgenauigkeit zusammenhängt: Je größer $X(x_d^{(j)})$, desto größer die durch einen Eingriff $u_d(t_k) = u_d^{(j)}$ erzeugte Folgemenge, desto zahlreicher die von dieser geschnittenen Quantisierungsgebiete $\{x \in \mathbb{R}^n | q_y(x) = y_d^{(i)}\}$. Große $X(x_d^{(j)})$ führen also zu mehr möglichen Meßsymbolen in den folgenden Abtastschritten, damit zu einem „Aufblähen“ des Modellverhaltens und deshalb zu einer weniger genauen diskreten Abstraktion. Offensichtlich nimmt die Größe der Menge $X(x_d^{(j)})$ nie zu (und in aller Regel sogar ab), wenn die mit $x_d^{(j)}$ assoziierte Kette von Eingangs- und Meßsymbolen sich weiter in die Vergangenheit erstreckt. Dies folgt unmittelbar aus der „Dreiecksstruktur“ von (2.34) – (2.38). Ein Vergrößern von v – der maximalen Länge von Symbolketten – ist deshalb gleichbedeutend mit dem Erzeugen einer „mindestens so feinen“ (in aller Regel feineren) Granularität der Überdeckung von \mathbb{R}^n ; v kann als Entwurfparameter interpretiert werden, den man zu einer Verbesserung der Genauigkeit der diskreten Approximation heranziehen kann. Dies bedeutet natürlich auch eine Erhöhung der Anzahl der Zustände und damit der Komplexität der diskreten Abstraktion.

Beispiel: Anhand des bereits eingeführten Drei-Tank-Praktikumsversuchs soll auch illustriert werden, in welchem Maße sich die (mengenwertigen) Zustandsschätzungen $X(x_d^{(j)})$ präzisieren, wenn man die Zustände $x_d^{(j)}$ der diskreten Abstraktion durch Hinzunahme nur jeweils eines zurückliegenden Stell- und Meßsymbols

⁵Notwendige und hinreichende Bedingungen für $v = 0$ findet man im Falle autonomer, linearer und zeitinvarianter Systeme ($x(t_{k+1}) = Ax(t_k)$, $y(t_k) = x(t_k)$) in [21]. Sie implizieren (bis auf Permutationen von Zeilen und Spalten) Diagonalgestalt der Matrix A sowie weitere Einschränkungen bezüglich der Eigenwerte von A .

erweitert. Bild 2.27 und 2.28 zeigen Beispiele für die Fälle $v = 0$ und $v = 1$ (man beachte die unterschiedliche Skalierung der Achsen).

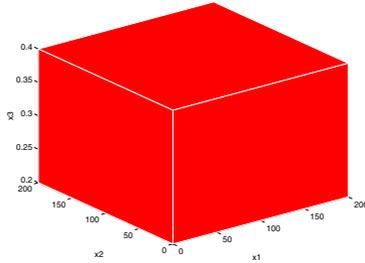


Bild 2.27: Menge kontinuierlicher Systemzustände, die mit dem Meßsymbol $y_d^{(2)}$ kompatibel sind.

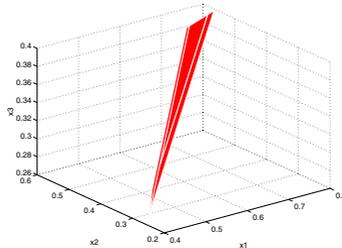


Bild 2.28: Menge kontinuierlicher Systemzustände, die mit der Geschichte $([y_d^{(2)}, y_d^{(2)}], \text{Pumpe A und C "normal"})$ kompatibel sind.

2.4.4 Automaten mit Meß- und Ausgangssymbolen

Bisher betrachteten wir einen Moore Automaten, der in jedem Zustand ein Meßsymbol ausgibt. Das zu approximierende kontinuierliche System be-

sitzt aber zusätzlich eine externe Ausgangsgröße z_d mit Wertebereich Z_d , die zur Formulierung regelungstechnischer Anforderungen benutzt wird. Soll die diskrete Abstraktion „Automat“ anstelle des unterlagerten kontinuierlichen Systems als Grundlage für den Reglerentwurf dienen, so muß man den Zuständen des Automaten auch Ausgangssymbole $z_d \in Z_d$ zuordnen. Dies läßt sich konzeptionell sehr einfach durchführen: Jeder Automaten-Zustand $x_d^{(i)}$ entspricht – wie im letzten Abschnitt ausgeführt – einer Teilmenge $X(x_d^{(i)})$ des \mathbb{R}^n . Der Zustand $x_d^{(i)}$ wird mit einem Ausgangssymbol $z_d^{(j)}$ versehen, wenn $X(x_d^{(i)})$ das Gebiet $\{\zeta \in \mathbb{R}^n \mid z_d^{(j)} = q_z(\zeta)\}$ schneidet. Man beachte, daß $X(x_d^{(i)})$ verschiedene solche „ z_d -Zellen“ schneiden kann; einem Automatenzustand $x_d^{(i)}$ können deswegen mehrere Ausgangssymbole zugeordnet sein. Die diskrete Abstraktion des kontinuierlichen Streckenanteils besitzt also eine Meßabbildung von ihrer Zustandsmenge X_d auf Y_d – für jeden Zustand existiert genau ein Meßsymbol – und eine Ausgangsfunktion von X_d in 2^{Z_d} (die Potenzmenge von Z_d , d.h. die Menge aller Teilmengen von Z_d).

Numerisch geht man folgendermaßen vor: Um zu entscheiden, ob ein bestimmter diskreter Zustand mit einem Ausgangssymbol $z_d^{(j)}$ versehen werden muß, fügt man einfach dem (Un-)Gleichungssystem (2.34) – (2.38) eine weitere Gleichung hinzu:

$$z_d^{(j)} = q_z(x). \quad (2.46)$$

Wenn eine Kette von Eingangs- und Meßsymbolen den „Zugehörigkeitstest“ zur Menge X_d bestanden hat (wenn also eine nichtleere Lösungsmenge $[x', w'_{j_1}, \dots, w'_{j_r}]'$ für (2.34) – (2.38) existiert), prüft man nach, ob auch das erweiterte (Un-)Gleichungssystem eine Lösung besitzt. Ist dies der Fall, ordnet man das Ausgangssymbol $z_d^{(j)}$ dem der untersuchten Zeichenkette entsprechenden diskreten Zustand zu.

2.4.5 Eine vollständig geordnete Menge diskreter Abstraktionen des kontinuierlichen Streckenanteils

In diesem Abschnitt zeigen wir formal, daß man für jede nichtnegative ganze Zahl v eine diskrete Abstraktion des kontinuierlichen Modells M erhält, die der Reduktionsbedingung (2.10) genügt. Darüberhinaus wird ein weiterer (bereits angesprochener und intuitiv einleuchtender) Sachverhalt bewiesen: Die Genauigkeit der diskreten Abstraktion wächst, wenn der Entwurfsparameter v vergrößert wird – das kontinuierliche Basissystem (2.27) – (2.29)

und die Familie diskreter Abstraktionen A_v , die man durch Variation des (nichtnegativen) ganzzahligen Parameters v erhält, bilden hinsichtlich ihrer Genauigkeit eine vollständig geordnete Menge. $\mathcal{B}(M) \subset (U_d \times Y_d \times Z_d)^T$ und $\mathcal{B}(A_{v_i}) \subset (U_d \times Y_d \times Z_d)^T$ bezeichnen das Verhalten von kontinuierlichem Modell M und Abstraktion A_{v_i} . Dann gilt der in Bild 2.29 illustrierte Satz 2.1:

Satz 2.1 (Vollständige Ordnung – kontinuierliches Basissystem) *Das kontinuierliche Basissystem und seine Abstraktionen A_v , $v = 0, 1, \dots$, bilden eine vollständig geordnete Menge bezüglich der Eigenschaft „Genauigkeit“:*

$$\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{B}(A_{v_i}) \subseteq \mathcal{B}(A_{v_j}); \quad v_i, v_j = 0, 1, \dots; \quad v_i \geq v_j. \quad (2.47)$$

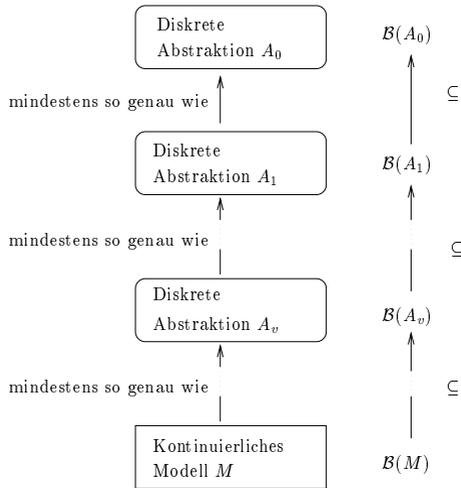


Bild 2.29: Das kontinuierliche „Basissystem“ M und seine diskreten Abstraktionen A_v bilden eine vollständig geordnete Menge.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion. Hierzu führen wir folgende Notation ein:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_k &:= \{t_0, \dots, t_k\}, \\
\mathbb{T}_{k+} &:= \{t_{k+1}, t_{k+2}, \dots\}, \\
\mathbb{U}_k &:= \{f : \mathbb{T}_k \rightarrow U_d \times Y_d \times Z_d\}, \\
\mathbb{U}_{k+} &:= \{f : \mathbb{T}_{k+} \rightarrow U_d \times Y_d \times Z_d\}, \\
\mathcal{B}_k(M) &:= \{b_k \in \mathbb{U}_k \mid \exists b_{k+} \in \mathbb{U}_{k+} \text{ so daß } [b_k, b_{k+}] \in \mathcal{B}(M)\}, \\
\mathcal{B}_k(A_v) &:= \{b_k \in \mathbb{U}_k \mid \exists b_{k+} \in \mathbb{U}_{k+} \text{ so daß } [b_k, b_{k+}] \in \mathcal{B}(A_v)\}.
\end{aligned}$$

1. Der Induktionsanfang

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(M) \subseteq \mathcal{B}_0(A_{v_i}) \subseteq \mathcal{B}_0(A_{v_j}), \quad v_i, v_j = 0, 1, \dots \quad (2.48) \\
v_i \geq v_j,
\end{aligned}$$

ist trivial: Da keine Einschränkungen bezüglich des Anfangszustands des kontinuierlichen Modells M vorliegen, kann M zum Zeitpunkt t_0 jedes Meßsymbol aus Y_d und jedes Ausgangssymbol aus Z_d generieren. Die Menge der Anfangszustände aller diskreten Abstraktionen A_{v_i}, A_{v_j} stimmt mit Y_d überein (s. Abschnitt 2.4.2), so daß jede dieser Abstraktionen jedes Element aus Y_d als Meßwert zum Zeitpunkt t_0 hervorbringen kann. Da die „ y_d -Zellen“ den gesamten \mathbb{R}^n überdecken, kann jede Abstraktion zum Zeitpunkt t_0 auch jedes Ausgangssymbol produzieren. Schließlich stellt u_d das Eingangssignal sowohl für M als auch für die Abstraktionen A_{v_i} und A_{v_j} dar; deswegen können alle Elemente $u_d^{(k)} \in U_d$ als Eingangssymbol zum Zeitpunkt t_0 auftreten. Es gilt also $\mathcal{B}_0(M) = \mathcal{B}_0(A_{v_i}) = \mathcal{B}_0(A_{v_j})$ und damit (2.48).

2. Nun setzen wir die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{k-1}(M) \subseteq \mathcal{B}_{k-1}(A_{v_i}) \subseteq \mathcal{B}_{k-1}(A_{v_j}), \quad v_i, v_j = 0, 1, \dots, \\
v_i \geq v_j,
\end{aligned}$$

voraus und beweisen, daß hieraus $\mathcal{B}_k(M) \subseteq \mathcal{B}_k(A_{v_i}) \subseteq \mathcal{B}_k(A_{v_j})$ folgt: Wir wählen ein beliebiges Element $b_{k-1} \in \mathcal{B}_{k-1}(M)$;

jetzt muß gezeigt werden, daß für jede mögliche „Fortsetzung“ $(u_d(t_k), y_d(t_k), z_d(t_k)) \in (U_d \times Y_d \times Z_d)$

$$\begin{aligned} [b_{k-1}, (u_d(t_k), y_d(t_k), z_d(t_k))] &\in \mathcal{B}_k(M) \\ \Rightarrow [b_{k-1}, (u_d(t_k), y_d(t_k), z_d(t_k))] &\in \mathcal{B}_k(A_{v_i}) \end{aligned} \quad (2.49)$$

und, für $v_i \geq v_j$,

$$\begin{aligned} [b_{k-1}, (u_d(t_k), y_d(t_k), z_d(t_k))] &\in \mathcal{B}_k(A_{v_i}) \\ \Rightarrow [b_{k-1}, (u_d(t_k), y_d(t_k), z_d(t_k))] &\in \mathcal{B}_k(A_{v_j}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

gilt. Definitionsgemäß kann auf kontinuierliches Modell und alle betrachteten Abstraktionen dasselbe Eingangssignal u_d angewandt werden: das Anfügen eines beliebigen Symbols $u_d(t_k) \in U_d$ an b_{k-1} gefährdet deswegen keine der beiden Implikationen (2.49), (2.50). Ihre Gültigkeit muß lediglich im Hinblick auf Erweiterungen durch Meß und Ausgangssymbole gezeigt werden. Kürzen wir $\tilde{f}^{-1}(x, w, u_d(t_i))$ durch $\tilde{f}_i^{-1}(x, w)$ ab, so besagt die linke Seite von (2.50), daß

$$\begin{aligned} z_d(t_k) &= q_z(x) \\ y_d(t_k) &= q_y(x) \\ y_d(t_{k-1}) &= q_y\left(\tilde{f}_{k-1}^{-1}(x, w_{k-1})\right) \\ &\vdots \\ y_d(t_{\max(k-v_i-1, 0)}) &= q_y\left(\tilde{f}_{\max(k-v_i-1, 0)}^{-1} \dots \left(\tilde{f}_{k-1}^{-1}(x, w_{k-1}), \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots, w_{\max(k-v_i-1, 0)}\right)\right) \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$\|w_l\|_\infty \leq 1, \quad l = \max(k - v_i - 1, 0) \dots k - 1,$$

eine Lösung für $[x', w'_{k-1}, \dots, w'_{\max(k-v_i-1, 0)}]'$ besitzt. Die rechte Seite von (2.50) ist gleichbedeutend mit der Lösbar-

keit von

$$\begin{aligned}
 z_d(t_k) &= q_z(x) \\
 y_d(t_k) &= q_y(x) \\
 y_d(t_{k-1}) &= q_y\left(\tilde{f}_{k-1}^{-1}(x, w_{k-1})\right) \\
 &\vdots \\
 y_d(t_{\max(k-v_j-1, 0)}) &= q_y\left(\tilde{f}_{\max(k-v_j-1, 0)}^{-1} \cdots \left(\tilde{f}_{k-1}^{-1}(x, w_{k-1}), \dots \right.\right. \\
 &\quad \left.\left. \dots, w_{\max(k-v_j-1, 0)}\right)\right)
 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$\|w_l\|_\infty \leq 1, \quad l = \max(k - v_j - 1, 0) \dots k - 1.$$

Da $v_i \geq v_j$ (und daher $\max(k - v_i - 1, 0) \leq \max(k - v_j - 1, 0)$), unterscheidet sich das zweite der beiden (Un-)Gleichungssysteme vom ersten nur durch das Weglassen von Gleichungen und Nebenbedingungen. Deshalb folgt sofort: Kann eine Lösung für das erste (Un-)Gleichungssystem gefunden werden (gilt die linke Seite von (2.50)), so existiert auch eine Lösung für das zweite (d.h. die rechte Seite von (2.50) gilt). Auf genau dieselbe Art und Weise zeigt man die Gültigkeit von (2.49). Man muß sich lediglich vergegenwärtigen, daß die linke Seite von (2.49) Lösbarkeit von

$$\begin{aligned}
 z_d(t_k) &= q_z(x) \\
 y_d(t_k) &= q_y(x) \\
 y_d(t_{k-1}) &= q_y\left(\tilde{f}_{k-1}^{-1}(x, w_{k-1})\right) \\
 &\vdots \\
 y_d(t_0) &= q_y\left(\tilde{f}_0^{-1} \cdots \left(\tilde{f}_{k-1}^{-1}(x, w_{k-1}), \dots, w_0\right)\right)
 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$\|w_l\|_\infty \leq 1, \quad l = 0, \dots, k - 1,$$

bedeutet. Wegen $0 \leq \max(k - v_i - 1, 0)$ impliziert dies die Existenz von Lösungen für die beiden vorstehenden (Un-)Gleichungssysteme. ■

2.4.6 Eine vollständig geordnete Menge diskreter Abstraktionen der hybriden Regelstrecke

Bisher betrachteten wir nur den kontinuierlichen Anteil der Regelstrecke und leiteten für diesen eine vollständig geordnete Menge diskreter Abstraktionen her. Nun zeigen wir, daß durch „Verschalten“ dieser Abstraktionen mit dem Modell D (Gln. (2.31),(2.32)) der diskreten Streckenkomponente ebenfalls eine vollständig geordnete Menge von (diskreten) Abstraktionen für die gesamte (hybride) Strecke entsteht. Das aus den Komponenten D und M zusammengesetzte (hybride) „Basismodell“ der Regelstrecke bezeichnen wir mit DM ; die aus D und den Approximationen A_v , $v = 0, 1, \dots$, gebildeten diskreten Abstraktionen von DM nennen wir DA_v . Wir betrachten das Verhalten von hybridem Basismodell und seinen Abstraktionen DA_v auf der Grundmenge

$$\tilde{U} := (U_d \times Z_d \times Y_d \times \tilde{U}_d)^T :$$

$\tilde{u}_d \in \tilde{U}$ fungiert als Stellgröße der hybriden Regelstrecke, die externe Ausgangsgröße $z_d \in Z_d$ wurde zur Formulierung von Entwurfsanforderungen eingeführt – beide müssen also im Verhalten der Streckenmodelle in Erscheinung treten. Die Signale $u_d \in U_d$ und $y_d \in Y_d$ wurden als meßbar vorausgesetzt – sie können also dem zu entwerfenden Regler zugeführt werden und sollten deshalb ebenfalls Bestandteil der Modellverhalten sein. Es gilt:

Satz 2.2 (Vollständige Ordnung – hybrides Basismodell) *Das hybride Basismodell DM und seine Abstraktionen DA_v , $v = 0, 1, \dots$, bilden eine vollständig geordnete Menge bezüglich der Eigenschaft „Genauigkeit“:*

$$\mathcal{B}(DM) \subseteq \mathcal{B}(DA_{v_i}) \subseteq \mathcal{B}(DA_{v_j}); \quad v_i, v_j = 0, 1, \dots; \quad v_i \geq v_j. \quad (2.51)$$

Aus der Perspektive der in Abschnitt 2.2 skizzierten „behaviouristischen“ Systemtheorie leuchtet Satz 2.2 unmittelbar ein. Auch ein formaler Beweis läßt sich mit ihrer Hilfe leicht führen:

Beweis: Zunächst sorgt man durch Anwendung des in Abschnitt 2.2.3 eingeführten inversen Projektionsoperators dafür, daß die Verhalten aller beteiligten Systeme auf der Grundmenge \tilde{U} angesiedelt sind. Das Verhalten von hybridem Basissystem und seiner diskreten Abstraktionen erhält man dann durch einfache

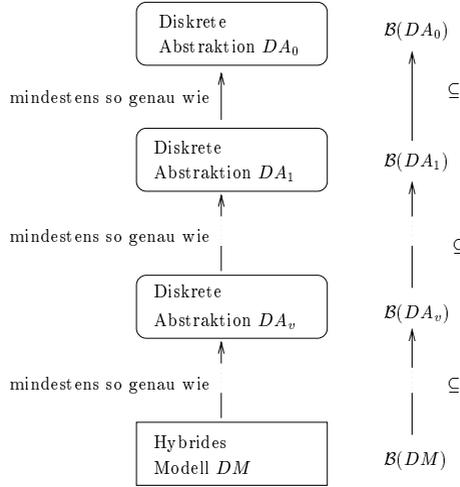


Bild 2.30: Das hybride „Basissystem“ DM und seine diskreten Abstraktionen DA_v bilden eine vollständig geordnete Menge.

Schnittmengenbildung:

$$\mathcal{B}(DM) := \text{Proj}_{\tilde{U}_d}^{-1}(\mathcal{B}(M)) \cap \text{Proj}_{Z_d}^{-1}(\mathcal{B}(D)), \quad (2.52)$$

$$\mathcal{B}(DA_v) := \text{Proj}_{\tilde{U}_d}^{-1}(\mathcal{B}(A_v)) \cap \text{Proj}_{Z_d}^{-1}(\mathcal{B}(D)). \quad (2.53)$$

Möchte man das Verhalten der beteiligten Systeme nur auf der Menge $(\tilde{U}_d \times Z_d)^T$ betrachten, so schließt man noch eine Projektion auf $\tilde{U}_d \times Z_d$ an. Aus Satz 2.1 folgt unmittelbar $\text{Proj}_{\tilde{U}_d}^{-1}(\mathcal{B}(M)) \subseteq \text{Proj}_{\tilde{U}_d}^{-1}(\mathcal{B}(A_{v_i})) \subseteq \text{Proj}_{\tilde{U}_d}^{-1}(\mathcal{B}(A_{v_j}))$, $v_i \geq v_j$. Diese Ordnung ist invariant bezüglich Schnittmengenbildung mit $\text{Proj}_{Z_d}^{-1}(\mathcal{B}(D))$ und einer sich eventuell anschließenden Projektion. ■

An dieser Stelle scheint ein vorläufiges Fazit angebracht: Wir haben gezeigt, wie man eine vollständig geordnete Menge diskreter Abstraktionen für

ein kontinuierliches oder hybrides Streckenmodell bestimmt. Die Ordnung innerhalb dieser Klasse von Abstraktionen wurde über die Teilmengenbeziehung „ \subseteq “ bezüglich ihrer Verhalten eingeführt (Satz 2.1 und 2.2). Deshalb erfüllen alle Abstraktionen des kontinuierlichen bzw. hybriden Basismodells die Reduktionsbedingung (2.10). Wir können also an die in Abschnitt 2.2.5 angestellten Überlegungen anknüpfen und den gesuchten diskreten Regler auf der Grundlage eines reduzierten Modells (einer der abgeleiteten Abstraktionen) entwerfen. Erfüllt ein solcher Regler die geforderten Spezifikationen für das betrachtete reduzierte Modell, so erzwingt er deren Einhaltung auch, wenn er mit dem Basissystem verschaltet wird. Wir müssen lediglich gewährleisten, daß eine solche Verschaltung auch tatsächlich durchgeführt werden kann – die Schnittmenge zwischen Reglerverhalten und Streckenverhalten muß nichtleer sein. Wie in Abschnitt 2.2.3 ausgeführt, lassen sich zeitgetriebene Systeme nur in absoluten Ausnahmefällen nicht verschalten – diese Bedingung können wir also in aller Regel als erfüllt ansehen.

Bevor wir nun zum zweiten Schritt der in diesem Kapitel beschriebenen Vorgehensweise – dem Entwurf diskreter Regler – kommen, bleibt aber noch eine Frage zu beantworten: *Welche* der abgeleiteten Abstraktionen soll für den Reglerentwurf herangezogen werden? Die Antwort liegt auf der Hand: Je gröber die Abstraktion, desto weniger Zustände werden zur Beschreibung ihres Verhaltens benötigt. Dies impliziert – wie im nächsten Abschnitt ausgeführt – ein Weniger an Entwurfsaufwand und an Reglerkomplexität. Wird andererseits als Entwurfsgrundlage ein „zu grobes“ Modell herangezogen (eine Approximation DA_v mit „zu großem“ Verhalten $\mathcal{B}(DA_v)$), so existiert kein Regler, der für dieses Modell noch die Einhaltung der Spezifikationen garantieren kann – die diskrete Regelungsaufgabe besitzt keine Lösung. Idealer Ausgangspunkt für die Bestimmung einer Rückführung ist deshalb das größte (d.h. ungenaueste) Modell, mit dem sich die Spezifikationen noch erfüllen lassen.

2.5 Reglerentwurf für nichtdeterministische diskrete Systeme

Der hier beschriebene Ansatz zum Entwurf diskreter Rückführungen stellt eine Variante einer vom Verfasser und von *Siu O'Young* vorgeschlagenen Synthese-Methode dar [33]. Diese basiert wiederum auf den wegweisenden

Arbeiten von *W. M. Wonham* und *P. J. Ramadge*, sowie auf deren Erweiterung auf zeitbehafte ereignisdiskrete Systeme in [6]. Die gewählte Vorgehensweise ist auf die im Abstraktionsprozeß gewonnenen diskreten Modelle zugeschnitten: Sie berücksichtigt Nichtdeterminismus und „zeitgetriebenen“ Charakter der (diskreten) Streckenapproximation.

Ziel des Entwurfsvorgangs ist eine geeignete Einschränkung des Streckenverhaltens durch den Regler. Das Verhalten eines Systems besteht aber aus einer Menge von i. a. unendlich vielen Trajektorien – es kann daher als anschauliches Hilfsmittel zur Formulierung von Entwurfsanforderungen dienen, nicht aber als Werkzeug für den eigentlichen Entwurfsvorgang. Dieser muß anhand einer „kompakten“ Repräsentation des Verhaltens – einer „Zustandsdarstellung“ durchgeführt werden. Hier zeigt sich eine Parallele zu modernen Entwurfsverfahren der kontinuierlichen Regelungstheorie: Auch dort werden Spezifikationen oft mit Hilfe von Ein-/ Ausgangsdarstellungen formuliert, die eigentliche Berechnung eines geeigneten Reglers erfolgt aber mittels (minimaler) Zustandsmodelle.

2.5.1 Regelungstechnische Ziele

Als erstes und wichtigstes Ziel ist natürlich die Erfüllung der Spezifikationen zu nennen – der Regler R muß das „freie“ Verhalten des Streckenmodells DA , soweit einschränken, daß das Verhalten des aus Modell und Regler bestehenden Kreises in einer spezifizierten Trajektorienmenge \mathcal{B}_{spez} enthalten ist. Modelle der hybriden Regelstrecke (sowohl das Basismodell als auch seine diskreten Abstraktionen) „leben“ auf der Grundmenge $(\tilde{U}_d \times U_d \times Y_d \times Z_d)^T$. Die Variable $\tilde{u}_d \in \tilde{U}_d$ dient als Eingriffsmöglichkeit in die Strecke, $z_d \in Z_d$ ist eine zur Formulierung von Entwurfszielen eingeführte Größe. $u_d \in U_d$ und $y_d \in Y_d$ – die „Verkopplungssignale“ zwischen kontinuierlicher und diskreter Streckenkomponente – wurden als meßbar vorausgesetzt und können deswegen als dem Regler zugeführte Information genutzt werden. Wir fassen sie im folgenden zu *einer* diskretwertigen Variable zusammen:

$$\tilde{y}_d := (u_d, y_d) \in \tilde{Y}_d := U_d \times Y_d.$$

Demgegenüber kann man i. a. nicht von Meßbarkeit der Größe z_d ausgehen. Dem Regler steht unter Umständen noch eine weitere – beispielsweise als (diskrete) Führungsgröße zu deutende – Variable $r_d \in R_d$ zur Verfügung; für

das Reglerverhalten $\mathcal{B}(R)$ gilt dann (Bild 2.31):

$$\mathcal{B}(R) \subset (\tilde{U}_d \times \underbrace{U_d \times Y_d}_{\tilde{Y}_d} \times R_d)^T.$$

Zur Formulierung der Spezifikationen genügen in aller Regel die „äußeren“

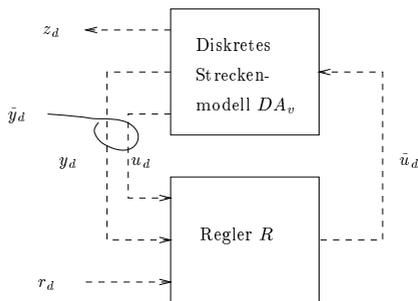


Bild 2.31: Diskreter Regelkreis.

Variablen z_d und r_d , so daß sich

$$\mathcal{B}_{spez} \subset (Z_d \times R_d)^T$$

ergibt. Die zentrale Forderung an den Regler R lautet also:

$$\mathcal{B}(\text{Regelkreis}) := \text{Proj}_{R_d}^{-1}(\mathcal{B}(DA_v)) \cap \text{Proj}_{Z_d}^{-1}(\mathcal{B}(R)) \quad (2.54)$$

$$\stackrel{!}{\subseteq} \text{Proj}_{\tilde{U}_d \times \tilde{Y}_d}^{-1}(\mathcal{B}_{spez}) \quad (2.55)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \text{Proj}_{Z_d \times R_d}(\mathcal{B}(\text{Regelkreis})) \\ &= \text{Proj}_{Z_d \times R_d}(\text{Proj}_{R_d}^{-1}(\mathcal{B}(DA_v)) \cap \text{Proj}_{Z_d}^{-1}(\mathcal{B}(R))) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\stackrel{!}{\subseteq} \mathcal{B}_{spez}. \quad (2.57)$$

Unerläßliche Nebenbedingung bleibt natürlich, daß $\mathcal{B}(\text{Regelkreis}) \neq \emptyset$ – Regler und diskretes Streckenmodell lassen sich tatsächlich verschalten. Es ist leicht ersichtlich, daß diese Forderungen weder den geschlossenen Kreis noch das Reglerverhalten eindeutig festlegen – (2.55) wird i.a. durch verschiedene $\mathcal{B}(R_i)$, $i = 1, 2, \dots$, erfüllt (Bild 2.32). *Ramadge* und *Wonham* schlagen

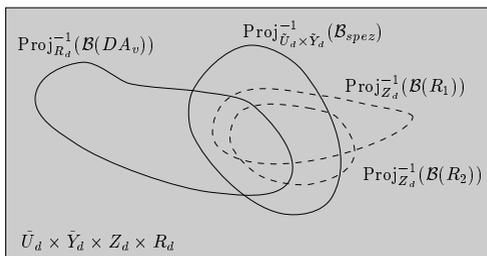


Bild 2.32: Verschiedene Regler erzwingen die Einhaltung der Spezifikationen.

in [37, 47, 38] deshalb vor, den vorhandenen Freiheitsgrad zu nutzen, um einen *minimal restriktiven* – die Einhaltung der Spezifikationen noch garantierenden – Regler zu finden. Ein solcher Regler wird – anders als sein Pendant in der klassischen Regelungstechnik – nicht zu jedem Abtastzeitpunkt einen Wert der Stellgröße auswählen, sondern nur diejenigen Stellsymbole ausschließen, die zu einer Verletzung der Spezifikationen führen können. Man spricht manchmal auch von einer *passiven Regelung*, weil lediglich ver hindernd (passiv), nicht aber erzwingend (aktiv) in die Strecke eingegriffen wird. Dieser als „supervisory control“ bezeichnete Ansatz läßt sich durch folgende Überlegung motivieren: Die in diesem Kapitel beschriebene Vorgehensweise – das Ersetzen kontinuierlicher bzw. hybrider Streckenmodelle durch diskrete Abstraktionen und eine hierauf basierende diskrete Regelung – wird in der Praxis fast immer in übergeordneten Ebenen einer Hierarchie zum Einsatz kommen. Die Umsetzung der Entscheidungen dieser Ebenen übernehmen unterlagerte Regelalgorithmen – diesen wird durch die gewählte minimal restriktive Philosophie maximale Freiheit bei der Umsetzung ihrer Aufgabe zugestanden.

Das im Sinne minimaler Restriktivität ideale Regelkreisverhalten wäre

offensichtlich

$$\mathcal{B}_{id}(\text{Regelkreis}) = \text{Proj}_{R_d}^{-1}(\mathcal{B}(DA_v)) \cap \text{Proj}_{\tilde{U}_d \times \tilde{Y}_d}^{-1}(\mathcal{B}_{spez}). \quad (2.58)$$

Dieses ideale Verhalten läßt sich i. a. aber nicht verwirklichen, weil die notwendigen Eingriffsmöglichkeiten in die Strecke fehlen. Man muß sich deswegen mit dem größten mit den zur Verfügung stehenden Stelleingriffen erreichbaren Verhalten $\mathcal{B}^\dagger \subseteq \mathcal{B}_{id}(\text{Regelkreis})$ begnügen (Bild 2.33). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *maximalen kontrollierbaren Teilmenge* von $\mathcal{B}_{id}(\text{Regelkreis})$. Anhand von Bild 2.33 wird auch unmittelbar

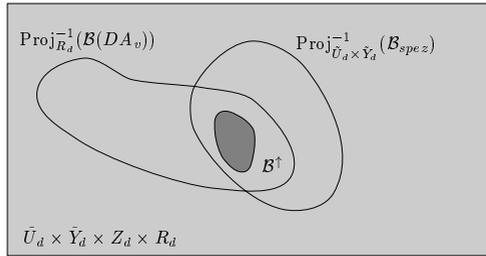


Bild 2.33: Maximales kontrollierbares Verhalten.

klar, daß \mathcal{B}^\dagger gleichzeitig das Verhalten des gesuchten (realisierbaren) Reglers verkörpert. Genauer: Das Reglerverhalten erhält man durch Projektion von \mathcal{B}^\dagger auf $\tilde{U}_d \times \tilde{Y}_d \times R_d$. Dem Problem der Bestimmung von \mathcal{B}^\dagger werden wir uns in Abschnitt 2.5.3 zuwenden. Zuvor müssen wir uns allerdings einige einfache Werkzeuge zur Berechnung und Realisierung von Reglern zurechtlegen.

2.5.2 Automaten

Berechnung und Realisierung des Reglers werden mit Hilfe kompakter, endlicher Darstellungen von abstrahiertem Streckenmodell und Spezifikationen durchgeführt. Die diskrete Approximation des kontinuierlichen Streckenanteils liegt bereits in einer solchen Form – als getakteter nichtdeterministischer endlicher Moore-Automat – vor. Aus rechentechnischen Gründen benutzen wir im folgenden eine leicht abgewandelte, aber äquivalente Darstellung:

Nichtdeterministische endliche Automaten *ohne* Ausgabe. Zunächst führen wir eine formale Definition solcher Automaten ein. Dann betrachten wir das *synchrone Produkt* zweier Automaten; mit dieser Verknüpfungsoperation läßt sich die diskrete Approximation der kontinuierlichen Streckenkomponente – besagter getakteter Moore-Automat – in einen Automaten ohne Ausgang transformieren. Das synchrone Produkt wird sich außerdem als das gesuchte Werkzeug zur rechnerischen Durchführung der Schnittmengenbildung zweier Verhalten erweisen. Mit seiner Hilfe kann man also die Operationen (2.53) und (2.58) durchführen und sich aus den Automatenmodellen von kontinuierlicher Streckenkomponente, diskretem Streckenanteil und Spezifikation ein Automatenmodell für das ideale Regelkreisverhalten beschaffen. Aus diesem „löst“ man dann in einem sich anschließenden zweiten Schritt einen realisierbaren Regler heraus.

2.5.2.1 Nichtdeterministische endliche Automaten ohne Ausgabe

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat besteht aus einer endlichen Zahl von Zuständen und einer „Schaltregel“, die angibt, in welche Folgezustände aus einem gegebenen Zustand übergegangen werden kann, wenn ein bestimmtes Ereignis auftritt. Formal läßt sich ein solcher Automat als Tupel (Q, Σ, e, Q_0) beschreiben – Q steht für die Menge der Automatenzustände, Σ für die Menge der auftretenden Ereignisse (auch Transitionssymbole oder Transitionsmarken genannt), $Q_0 \subseteq Q$ bezeichnet die Menge möglicher Anfangszustände, und $e : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ stellt die Übergangsfunktion („Schaltregel“) dar. e ist eine *partielle* Funktion: Nicht in allen Zuständen muß das Auftreten aller Ereignisse erlaubt sein. Man beachte, daß die Funktion e in die mit 2^Q bezeichnete Potenzmenge (die Menge aller Teilmengen) von Q abbildet⁶ – einem Zustands/Ereignis-Paar können so mehrere mögliche Folgezustände zugewiesen werden.

Eine (bezüglich des Schreibaufwands) etwas ökonomischere Darstellung ist die Transitionstabelle: Man listet alle möglichen Zustandsübergänge in der Form $q_a \xrightarrow{\sigma} q_e$ bzw. (q_a, σ, q_e) auf. q_a bezeichnet den Ausgangs-, q_e den Endzustand der Transition, σ das Transitionssymbol. Die Menge aller Transitionen nennt man Δ . Zusätzlich muß man die Menge Q_0 der möglichen Anfangszustände angeben. Durch das Paar (Δ, Q_0) wird der betrachtete Automat eindeutig charakterisiert.

⁶Genausogut hätte man e als *Relation* auf Q definieren können.

Man beachte, daß wir bei dieser Klasse endlicher Zustandsmaschinen keinen von außen vorgegebenen Takt voraussetzen.

Beispiel: Man betrachte den in Bild 2.34 dargestellten Automaten mit drei Zuständen und den Transitionssymbolen $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Zustände sind durch Kreise gekennzeichnet, Ereignis-

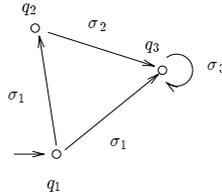


Bild 2.34: Beispiel eines einfachen Automaten.

nisse (Transitionen) durch Pfeile zwischen den Zuständen. Der (in diesem Beispiel einzig mögliche) Anfangszustand wird durch einen von außen in den Automaten weisenden Pfeil kenntlich gemacht. Man erhält also:

$$\begin{aligned}\Delta &= \{(q_1, \sigma_1, q_2), (q_1, \sigma_1, q_3), (q_2, \sigma_2, q_3), (q_3, \sigma_3, q_3)\}, \\ Q_0 &= \{q_1\}.\end{aligned}$$

Offensichtlich kann der gezeigte Automaten nur zwei verschiedene Folgen von Transitionssymbolen produzieren: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_3\dots$ und $\sigma_1\sigma_3\sigma_3\sigma_3\dots$.

2.5.2.2 Synchrones Produkt zweier Automaten

Das *synchrone Produkt*⁷ ist eine „Rechenvorschrift“ zur Verknüpfung zweier Automaten: Gegeben seien zwei Automaten

$$\begin{aligned}Aut_1 &= (Q_1, \Sigma_1, e_1, Q_{1_0}), \\ Aut_2 &= (Q_2, \Sigma_2, e_2, Q_{2_0}).\end{aligned}$$

⁷Oft spricht man auch von *paralleler* oder *synchroner Komposition*.

Das synchrone Produkt $Aut_1 || Aut_2$ beider Automaten ist wiederum ein Automat

$$Aut_1 || Aut_2 := (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, e, Q_{1_0} \times Q_{2_0}) \quad (2.59)$$

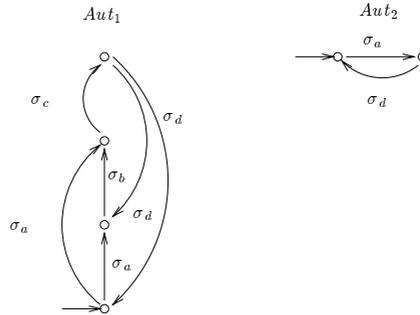
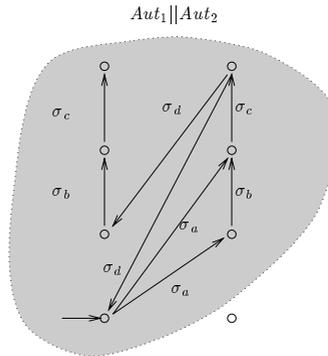
mit Übergangsfunktion

$$e((q_1, q_2), \sigma) = \begin{cases} (e_1(q_1, \sigma), e_2(q_2, \sigma)) \text{ falls } \sigma \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \text{ und sowohl } e_1(q_1, \sigma) \\ \text{als auch } e_2(q_2, \sigma) \text{ definiert sind,} \\ (e_1(q_1, \sigma), q_2) \text{ falls } \sigma \in \Sigma_1 - \Sigma_2 \text{ und } e_1(q_1, \sigma) \text{ definiert ist,} \\ (q_1, e_2(q_2, \sigma)) \text{ falls } \sigma \in \Sigma_2 - \Sigma_1 \text{ und } e_2(q_2, \sigma) \text{ definiert ist,} \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß den Automaten Aut_1 und Aut_2 keine Beschränkungen hinsichtlich Ereignissen auferlegt wird, die im Verhalten des jeweils anderen Automaten keine Rolle spielen. Ereignisse, die sowohl in Σ_1 als auch in Σ_2 enthalten sind, können dagegen nur auftreten, wenn beide Automaten sich auf ihre Ausführung „einigen“⁸.

Beispiel: Zur Verdeutlichung der synchronen Produktbildung betrachten wir ein einfaches Beispiel: Die zu den Automaten Aut_1 und Aut_2 gehörigen Mengen von Transitionssymbolen seien $\Sigma_1 = \{\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d\}$ und $\Sigma_2 = \{\sigma_a, \sigma_d\}$. Ihr Übergangsverhalten ist in Bild 2.35 gezeigt, das synchrone Produkt beider Automaten in Bild 2.36. Über die Ereigniskette $\sigma_d \sigma_b \sigma_c$ gelangt man zu einem Zustand des synchronen Produkts, den man nicht wieder verlassen kann. Der Zustand in der rechten unteren Ecke von Bild 2.36 kann vom Anfangszustand aus nie erreicht werden und ist deshalb nicht Teil einer (schraffiert gezeichneten) Minimalrealisierung. Wir vereinbaren, bei der Bildung des synchronen Produkts in Zukunft alle nicht erreichbaren Zustände und von ihnen ausgehenden Transitionen wegzulassen.

⁸Zwei wichtige Sonderfälle ergeben sich für $\Sigma_1 = \Sigma_2$ und $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Im ersten Fall können sämtliche Transitionen nur von beiden Automaten gemeinsam ausgeführt werden – man spricht vom *vollständig synchronen Produkt*. Im zweiten Fall arbeiten beide Automaten unabhängig voneinander – im angelsächsischen Raum spricht man vom *shuffle product*.

Bild 2.35: Automaten Aut_1 und Aut_2 .Bild 2.36: Synchrones Produkt $Aut_1 || Aut_2$.

2.5.2.3 Moore-Automaten, Automaten ohne Ausgabe und tick-Automaten

In Abschnitt 2.4 leiteten wir diskrete Abstraktionen des kontinuierlichen Streckenanteils in Form getakteter nichtdeterministischer endlicher Moore-

Automaten her. Formal läßt sich ein solcher Automat als Tupel $\{X_d, U_d, f_d, X_{d0}, Y_d, Z_d, q_{dy}, q_{dz}\}$ beschreiben: X_d ist die Menge der Automatenzustände, U_d die Menge der Eingangs- oder Transitionssymbole. $f_d : X_d \times U_d \rightarrow 2^{X_d}$ ist die Transitionsfunktion. Man beachte, daß die Funktion f_d in die mit 2^{X_d} bezeichnete Potenzmenge von X_d abbildet – einem Zustands/Ereignis-Paar können so mehrere mögliche Folgezustände zugewiesen werden. Da U_d ein frei wählbares Eingangssymbol darstellt, ist f_d für jede Kombination $(x_d, u_d) \in X_d \times U_d$ definiert – f_d ist also eine vollständige Funktion. X_{d0} ist die Menge möglicher Anfangszustände, Y_d die Menge der Meß- und Z_d die Menge der Ausgangssymbole. Die Meßfunktion $q_{dy} : X_d \rightarrow Y_d$ ordnet jedem Automatenzustand ein $y_d \in Y_d$ zu. Die Ausgangsfunktion $q_{dz} : X_d \rightarrow 2^{Z_d}$ bildet schließlich jeden Zustand auf eine (nichtleere) Teilmenge von Z_d ab.

Den diskreten Streckenanteil hatten wir in Abschnitt 2.4.1 ebenfalls als getakteten Moore-Automaten eingeführt.

Für die Auslegung des Reglers verwenden wir aber (spezielle) nichtdeterministische endliche Automaten ohne Ausgabe. Solche Automaten führten wir *ohne* von außen eingepprägten Zeittakt ein. Trotzdem läßt sich der Übergang zwischen beiden Automatenklassen mit Hilfe des synchronen Produkts leicht bewerkstelligen: Wir ersetzen einfach das jedem Zustand des Moore-Automaten zugeordnete Meßsymbol durch eine mit diesem Symbol gekennzeichnete Transition, die vom jeweiligen Zustand in ihn selbst zurückführt. Diese Vorgehensweise ist in Bild 2.37 (Ausschnitt eines Moore-Automaten) und Bild 2.38 (resultierender Automat ohne Ausgang) illustriert. Mit

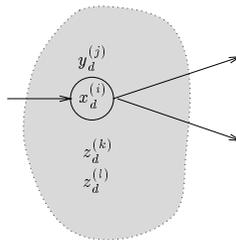


Bild 2.37: Ausschnitt eines Moore-Automaten.

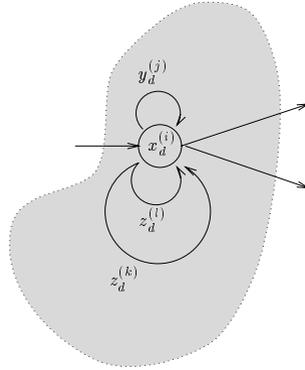


Bild 2.38: Automat ohne Ausgang (Ausschnitt).

den Ausgangssymbolen $z_d \in Z_d$ verfahren wir ähnlich; wir müssen allerdings berücksichtigen, daß Zuständen des Moore-Automaten *mehrere* Ausgangssymbole zugeordnet sein können. Solche Zustände werden deshalb mit mehreren mit Symbolen aus Z_d gekennzeichneten Transitionen versehen (Bild 2.38). Nun muß man noch dafür sorgen, daß die Transitionen in der richtigen Reihenfolge und im gewünschten zeitlichen Takt abgearbeitet werden: Nach jedem Auftreten eines Eingangssymbols muß ein Abtastintervall (symbolisiert durch das Auftreten eines tick-Ereignisses) vergehen, bevor sich eine mit einem Meßsymbol versehene Transition und dann eine mit einem Ausgangssymbol gekennzeichnete Transition anschließen. Dies erzwingt man durch Synchronisation mit einer einfachen (in der rechten Hälfte von Bild 2.39 dargestellten) Zustandsmaschine. Die ticks dieser Maschine kann man sich als mit einer äußeren Uhr synchronisiert denken. Das in Bild 2.39 gezeigte synchrone Produkt nennen wir aus naheliegenden Gründen einen tick-Automaten. Formal: Ein Automat (Δ, Q_0) heißt tick-Automat, wenn tick als Transitionssymbol wenigstens eines Elements $\delta \in \Delta$ vorkommt.

Das Verhalten eines tick-Automaten definieren wir folgendermaßen: Wir bezeichnen die auftretenden ticks mit t_0, t_1, \dots und interpretieren alle vor dem t_0 -tick auftretenden Symbole als $u_d(t_0), y_d(t_0), z_d(t_0)$, alle zwischen t_0 -

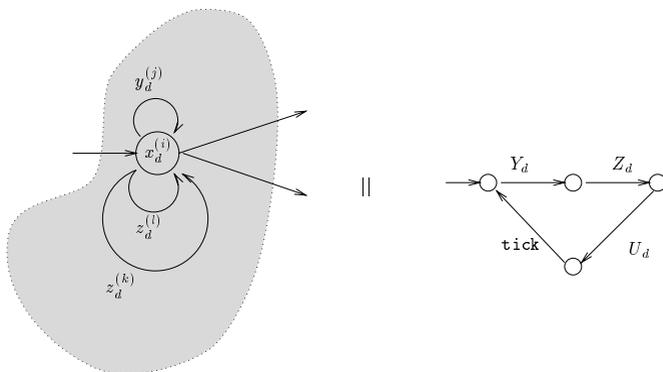


Bild 2.39: tick-Automat (Ausschnitt).

und t_1 -tick auftretenden Symbole als $u_d(t_1), y_d(t_1), z_d(t_1)$ usw. Auf diese Art und Weise erzeugt das tick-Automatenmodell des kontinuierlichen Streckenteils ein Verhalten auf der Grundmenge $(U_d \times Y_d \times Z_d)^\mathbb{T}$, $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, \dots\}$. Ein aus dem Moore-Automaten der diskreten Streckenkomponente abgeleiteter tick-Automat „lebt“ – wie dieser – auf der Grundmenge $(\tilde{U}_d \times Y_d \times U_d)^\mathbb{T}$.

Wir sagen, ein getakteter Moore-Automat und ein tick-Automat seien *äquivalent*, wenn ihr Verhalten identisch ist. Offensichtlich generiert man durch die geschilderte Vorgehensweise zu den vorgegebenen Moore-Automaten äquivalente tick-Automaten.

Verknüpft man zwei auf derselben Menge von Transitionssymbolen definierte tick-Automaten Aut_1 und Aut_2 mittels ihres synchronen Produkts, so ist das Verhalten des resultierenden tick-Automaten $Aut_1 || Aut_2$ gerade die Schnittmenge der Verhalten von Aut_1 und Aut_2 :

$$\mathcal{B}(Aut_1 || Aut_2) = \mathcal{B}(Aut_1) \cap \mathcal{B}(Aut_2). \tag{2.60}$$

Im allgemeinen Fall (die Mengen der Transitionssymbole stimmen nicht überein) vervollständigt man (2.60) auf bekannte Art und Weise durch Einführen entsprechender inverser Projektionen.

An dieser Stelle muß auf ein technisches Detail hingewiesen werden: Konstruiert man tick-Automaten wie gezeigt aus getakteten (Moore-) Automaten, so ist natürlich gewährleistet, daß man von jedem Zustand zum nächsten tick gelangt. Bei der Bildung des synchronen Produkts zweier tick-Automaten (von denen einer beispielsweise das Streckenmodell, der andere die Spezifikationen repräsentiert) können aber auch Zustände entstehen, von denen aus kein weiterer tick mehr erreicht werden kann. Man spricht dann von einem *das Fortschreiten der Zeit blockierenden* bzw. einem *zeitlich blockierenden* tick-Automaten. Ein solches Ergebnis ist natürlich nicht realisierbar, weil man die Zeit eben nicht anhalten kann. Eine der Anforderungen an einen realisierbaren Regler besteht deshalb gerade darin, solche Phänomene im Regelkreis auszuschließen. Wie wir einen solchen Regler synthetisieren können, behandeln wir im nächsten Abschnitt. Außerdem erhebt sich die Frage, wie die Möglichkeit des Entstehens zeitlich blockierender tick-Automaten aus zeitlich nicht blockierenden tick-Automaten mit (2.60) vereinbart werden kann. Die Antwort ist einfach: Das Verhalten von tick-Automaten besteht definitionsgemäß aus *Folgen* von Symbolen bzw. Symbolkombinationen. Von $Aut_1 || Aut_2$ gegebenenfalls generierte endliche (und nicht fortsetzbare) Ketten von Symbolen treten im Verhalten des synchronen Produkts deshalb nicht in Erscheinung.

2.5.3 Reglersynthese

Eine diskrete Abstraktion der kontinuierlichen bzw. hybriden Regelstrecke liege als tick-Automat Aut_S vor. Auch die Spezifikationen seien in ein tick-Automatenmodell Aut_{spez} übersetzt. Durch Bildung des synchronen Produkts $Aut = Aut_S || Aut_{spez}$ eliminiert man alle Folgen von Symbolen aus Aut , die nicht mit den Spezifikationen vereinbar sind: $\mathcal{B}(Aut)$ gibt das ideale Regelkreisverhalten an. Nun bleibt noch, denjenigen tick-Automaten aus Aut „herauszulösen“, der der größten mit den zur Verfügung stehenden Eingriffsmöglichkeiten realisierbaren Teilmenge \mathcal{B}^\dagger entspricht; \mathcal{B}^\dagger ist dann das minimal eingeschränkte (den Spezifikationen aber genügende) Regelkreisverhalten bzw. – nach „Herausprojizieren“ der Ausgangssymbole z_d – das minimal restriktive Reglerverhalten. Um diese Vorgehensweise zu präzisieren, benötigen wir den Begriff eines *zeitlich nicht blockierenden restringierbaren tick-Teilautomaten*: Vor Einführung dieses Begriffs sei an dieser Stelle aber auf die Parallele zu dem in der „klassischen“ Regelungstechnik unter dem Namen „Inneres-Modell-Prinzip“ bekannten Sachverhalt hingewiesen: Die Zu-

standsstruktur des Reglers wird durch das Zustandsmodell Aut_S der Strecke und die Zustandsdarstellung Aut_{spez} der Spezifikationen bestimmt.

Definition 2.1 (Partner, tick-Teilautomaten) *Gegeben seien zwei tick-Automaten $Aut = (\Delta, Q_0)$ und $\widetilde{Aut} = (\widetilde{\Delta}, \widetilde{Q}_0)$. Zwei Transitionen δ_1, δ_2 heißen Partner, wenn ihr Ausgangszustand und ihr Transitionssymbol übereinstimmen: $\delta_1 = (q_a, \sigma, q_{e_1}), \delta_2 = (q_a, \sigma, q_{e_2})$.*

\widetilde{Aut} heißt tick-Teilautomat von Aut (geschrieben als $\widetilde{Aut} \subseteq Aut$), wenn gilt:

1. $\widetilde{\Delta} \subseteq \Delta$ und $\widetilde{Q}_0 \subseteq Q_0$,
2. die Transition $\delta \in \Delta$ kann nur dann Element von $\widetilde{\Delta}$ sein, wenn alle ihre Partner ebenfalls in $\widetilde{\Delta}$ enthalten sind.

Anmerkung: Die einzig möglichen Partner-Transitionen in den von uns benutzten tick-Automaten sind mit Stellsymbolen $\tilde{u}_d \in \tilde{U}_d$ versehen. Sie modellieren den Nichtdeterminismus der diskreten Streckenabstraktion auf der Ebene der tick-Automaten. Wenn wir aus einer solchen Zustandsmaschine eine mit dem Symbol $\tilde{u}_d^{(j)}$ gekennzeichnete Transition entfernen, so erhalten wir nur dann einen tick-Teilautomaten, wenn wir gleichzeitig alle im selben Zustand beginnenden $\tilde{u}_d^{(j)}$ -Transitionen eliminieren. Anschaulich gesprochen: In einem bestimmten Zustand wird ein Stellsymbol entweder verboten (alle $\tilde{u}_d^{(j)}$ -Transitionen fallen weg) oder erlaubt (keine der möglichen $\tilde{u}_d^{(j)}$ -Transitionen wird entfernt).

Definition 2.2 (Restringierbare tick-Teilautomaten) *Aut sei das synchrone Produkt von Aut_S und Aut_{spez} (d.h. $Aut = Aut_S || Aut_{spez}$), Q_S und Δ_S die Zustandsmenge bzw. die Menge aller Transitionen von Aut_S . $\widetilde{Aut} = (\widetilde{\Delta}, \widetilde{Q}_0)$ sei ein tick-Teilautomat von $Aut = (\Delta, Q_0)$. Seine Zustandsmenge werde mit \widetilde{Q} bezeichnet. Jedes $\tilde{q} \in \widetilde{Q}$ sei durch eine Sequenz von Transitionen mit mindestens einem der Anfangszustände $\tilde{q}_0 \in \widetilde{Q}_0$ verbunden. \widetilde{Aut} heißt restringierbar (bezüglich Aut_S), wenn gilt:*

1. $\widetilde{Q}_0 = Q_0$,
2. aus $(q_{S_a}, \sigma, q_{S_e}) \in \Delta_S, (q_{S_a}, q_{spez_a}) \in \widetilde{Q}$ und $((q_{S_a}, q_{spez_a}), \sigma, (q_{S_e}, -)) \notin \widetilde{\Delta}$ folgt: $\sigma \in \tilde{U}_d$ (das Symbol „-“ steht für „don't care“).

Die Klasse bezüglich Aut_S restringierbarer tick-Teilautomaten von Aut besteht also aus genau den Transitionsstrukturen, die sich durch Verbieten von Stellsymbolen $\tilde{u}_d \in \tilde{U}_d$ ergeben. Nur restringierbare tick-Teilautomaten lassen sich deshalb durch die zur Verfügung stehenden Stellengriffe realisieren. Diese Bedingung ist aber nur notwendig, nicht hinreichend. Man muß weiterhin fordern, daß die Zeit nicht „angehalten“ wird:

Definition 2.3 (Zeitlich nichtblockierende tick-Automaten) *Ein tick-Automat Aut heißt zeitlich nicht blockierend, wenn von allen seinen Zuständen eine Transitionskette ausgeht, die ein tick-Symbol enthält.*

Ein tick-Teilautomat eines gegebenen $Aut = Aut_S || Aut_{spez}$ läßt sich also mittels vorhandener Eingriffsmöglichkeiten genau dann realisieren, wenn er restringierbar bezüglich Aut_S und zeitlich nichtblockierend ist. Die Menge aller solcher tick-Teilautomaten von Aut bezeichnen wir mit $\{Real_i(Aut)\}$. Die Beziehung \subseteq induziert eine partielle Ordnung auf der Menge $\{Real_i(Aut)\}$. Nun müssen wir noch zeigen, daß in dieser Menge ein (eindeutig definiertes) größtes Element $G(Real_i(Aut))$ existiert. Gelingt uns dies, so haben wir mit $G(Real_i(Aut))$ ein Zustandsmodell für \mathcal{B}^\dagger – das gesuchte größte realisierbare Regelkreisverhalten – gefunden. \mathcal{B}^\dagger kann dann als diejenige Transitionsstruktur interpretiert werden, die bei Anwendung einer minimal restriktiven Regelung „übrig bleibt“.

Anmerkung: In einer partiell geordneten Menge (M, \subseteq) unterscheidet man zwischen maximalen und größten Elementen (vgl. Abschnitt 2.3.2.1). Eine partiell geordnete Menge kann mehrere maximale Elemente, aber höchstens ein größtes Element enthalten.

Um die Existenz eines größten Elements in $\{Real_i(Aut)\}$ zu beweisen, führen wir einen Verknüpfungsoperator für tick-Automaten ein: $\widetilde{Aut}_1 = (\tilde{\Delta}_1, \tilde{Q}_{0_1})$ und $\widetilde{Aut}_2 = (\tilde{\Delta}_2, \tilde{Q}_{0_2})$ seien zwei tick-Teilautomaten von Aut . Offensichtlich ist dann

$$\widetilde{Aut} := (\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2, \tilde{Q}_{0_1} \cup \tilde{Q}_{0_2})$$

ebenfalls ein tick-Teilautomat von Aut . Wir bezeichnen \widetilde{Aut} als Vereinigung von \widetilde{Aut}_1 und \widetilde{Aut}_2 und schreiben $\widetilde{Aut} = \widetilde{Aut}_1 \cup \widetilde{Aut}_2$. Man kann nun leicht zeigen, daß die Menge aller restringierbarer tick-Teilautomaten von Aut bezüglich der \cup -Operation abgeschlossen ist:

Lemma 2.1 $\widetilde{Aut}_1 = (\check{\Delta}_1, \check{Q}_{0_1})$ und $\widetilde{Aut}_2 = (\check{\Delta}_2, \check{Q}_{0_2})$ seien zwei bezüglich $Aut_S = (\Delta_S, Q_{0_S})$ restringierbare **tick**-Teilautomaten von $Aut = (\Delta, Q_0)$. Dann ist $\widetilde{Aut} = \widetilde{Aut}_1 \cup \widetilde{Aut}_2$ ebenfalls restringierbar bezüglich Aut_S .

Beweis: Es gelte $\delta_S = (q_{S_a}, \sigma, q_{S_e}) \in \Delta_S$, $\delta = ((q_{S_a}, q_{speza}), \sigma, (q_{S_e}, -)) \notin \check{\Delta}_1 \cup \check{\Delta}_2$, aber (q_{S_a}, q_{speza}) ist Element der Zustandsmenge von $\widetilde{Aut}_1 \cup \widetilde{Aut}_2$. Dann gilt entweder

1. (q_{S_a}, q_{speza}) ist Element der Zustandsmenge von \widetilde{Aut}_1 , und $\delta \notin \check{\Delta}_1$, oder
2. (q_{S_a}, q_{speza}) ist Element der Zustandsmenge von \widetilde{Aut}_2 , und $\delta \notin \check{\Delta}_2$.

Da sowohl \widetilde{Aut}_1 als auch \widetilde{Aut}_2 restringierbar bezüglich Aut_S sind, folgt in beiden Fällen $\sigma \in \check{U}_d$. ■

Dies gilt auch für die Klasse der zeitlich nichtblockierenden **tick**-Teilautomaten von Aut :

Lemma 2.2 $\widetilde{Aut}_1 = (\check{\Delta}_1, \check{Q}_{0_1})$ und $\widetilde{Aut}_2 = (\check{\Delta}_2, \check{Q}_{0_2})$ seien zwei zeitlich nichtblockierende **tick**-Teilautomaten von $Aut = (\Delta, Q_0)$. Dann ist $\widetilde{Aut} = \widetilde{Aut}_1 \cup \widetilde{Aut}_2$ ebenfalls zeitlich nichtblockierend.

Beweis: q sei Element der Zustandsmenge von $\widetilde{Aut}_1 \cup \widetilde{Aut}_2$. Dann gilt entweder

1. q ist Element der Zustandsmenge von \widetilde{Aut}_1 , und es existiert deshalb eine Sequenz von $\delta_i \in \check{\Delta}_1 \subseteq \check{\Delta}_1 \cup \check{\Delta}_2$, die eine **tick**-Transition beinhaltet, oder
2. q ist Element der Zustandsmenge von \widetilde{Aut}_2 , und es existiert deshalb eine Sequenz von $\delta_i \in \check{\Delta}_2 \subseteq \check{\Delta}_1 \cup \check{\Delta}_2$, die eine **tick**-Transition beinhaltet. ■

Damit ist auch Abgeschlossenheit von $\{Real_i(Aut)\}$ – der Menge aller restringierbarer und zeitlich nichtblockierender **tick**-Teilautomaten von Aut – bezüglich \cup gezeigt. Die partiell geordnete Menge $(\{Real_i(Aut)\}, \subseteq)$ bildet – wenn nichtleer – zusammen mit der Operation $\cup : \{Real_i(Aut)\} \times \{Real_i(Aut)\} \rightarrow \{Real_i(Aut)\}$ einen *Halbverband* (vgl. [23]). Ein solcher Halbverband mit endlich vielen Elementen besitzt immer ein größtes Element. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2.3 (Existenz eines größten Elements) *Ist die Menge $\{Real_i(Aut)\}$ aller bezüglich Aut_S restringierbarer und zeitlich nichtblockierender tick-Teilautomaten von Aut nichtleer, so besitzt sie ein größtes Element.*

Das größte Element der Menge $\{Real_i(Aut)\}$ (und damit der minimal restriktive Regler) kann nun mittels einer formalen Prozedur rechnerisch ermittelt werden. Ein solcher Algorithmus wurde von *S. O'Young* implementiert.

2.5.3.1 Ein *sehr* einfaches Beispiel

Wir betrachten ein *sehr* einfaches Beispiel, um die Wirkungsweise des geschilderten Algorithmus zu verdeutlichen. Die diskrete Abstraktion des Streckenmodells ist in Form eines Moore-Automaten in der linken Hälfte von Bild 2.40 dargestellt. Stell-, Ausgangs- und Meßgröße können jeweils nur zwei verschie-

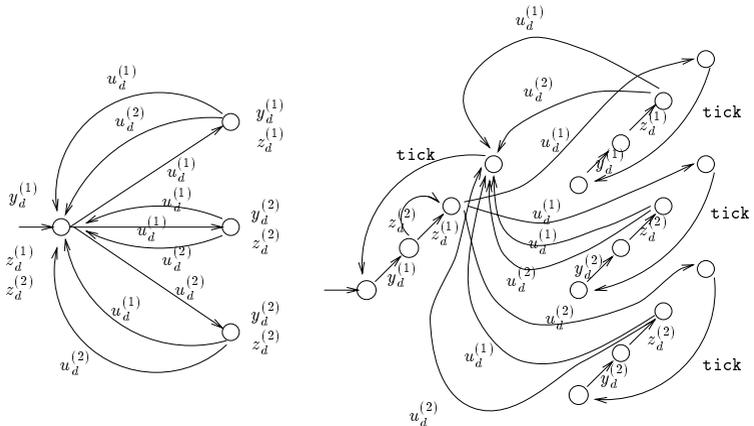


Bild 2.40: Moore-Automat als Streckenmodell (links) und äquivalenter tick-Automat Aut_S (rechts).

dene Werte annehmen:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_d &= U_d = \{u_d^{(1)}, u_d^{(2)}\}, \\ Z_d &= \{z_d^{(1)}, z_d^{(2)}\}, \\ \tilde{Y}_d &= Y_d = \{y_d^{(1)}, y_d^{(2)}\}. \end{aligned}$$

Vom Anfangszustand – in dem $y_d^{(1)}$ gemessen wird und $z_d^{(1)}$ oder $z_d^{(2)}$ als Wert der Ausgangsgröße auftreten kann – führt bei Eingabe des Stellsymbols $u_d^{(2)}$ eine eindeutige Transition in einen Folgezustand. Gibt man $u_d^{(1)}$ ein, sind dagegen zwei Zustandsübergänge möglich. In der rechten Hälfte von Bild 2.40 sieht man den dem Moore-Automaten äquivalenten tick-Automaten Aut_S .

Als Spezifikation verlangen wir, daß spätestens nach dem ersten tick nur noch das Ausgangssymbol $z_d^{(1)}$ auftreten darf, nicht aber $z_d^{(2)}$. Externe Reglereingangsgrößen spielen in diesem einfachen Beispiel keine Rolle; das spezifizierte Verhalten lautet also:

$$\mathcal{B}_{spez} = \{z_d^{(1)} z_d^{(1)} z_d^{(1)} \dots, z_d^{(2)} z_d^{(1)} z_d^{(1)} \dots\} \subset Z_d^T.$$

Ein tick-Automat Aut_{spez} mit diesem Verhalten ist in Bild 2.41 gezeigt.

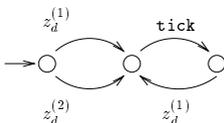


Bild 2.41: tick-Automat Aut_{spez} für \mathcal{B}_{spez} .

Als ersten Schritt der Reglersynthese bildet man nun das synchrone Produkt $Aut = Aut_S || Aut_{spez}$ beider tick-Automaten (der erreichbare Teil von $Aut = Aut_S || Aut_{spez}$ ist in Bild 2.42 dargestellt). Hierdurch werden alle Transitionen (mit Ausnahme der ersten) eliminiert, die mit einem $z_d^{(2)}$ -Symbol versehen sind. Das Resultat läßt sich offensichtlich nicht realisieren: Es ist weder restringierbar noch zeitlich nichtblockierend. Bei näherer Betrachtung stellt man fest, daß für dieses Problem keine Lösung existiert: $\{Real_i(Aut)\} = \emptyset$.

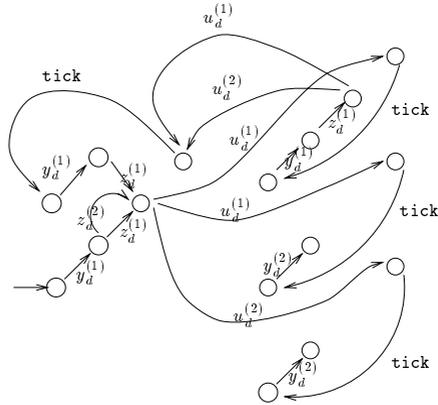


Bild 2.42: tick-Automat $Aut = Aut_S \parallel Aut_{spez}$ (erreichbarer Teil).

Kein (realisierbarer) Regler kann für die betrachtete Abstraktion die Einhaltung der Spezifikationen erzwingen. Dies bedeutet natürlich nicht, daß das unterlagerte hybride Regelproblem keine Lösung besäße: In einem solchen Fall müßte man auf eine genauere (d.h. in der abgeleiteten Modellhierarchie „weiter unten“ angesiedelte) Abstraktion der kontinuierlichen oder hybriden Strecke zurückgreifen.

Nun untersuchen wir, ob sich – für dieselbe diskrete Strecken-Approximation – ein anderes „Wunschverhalten“ \mathcal{B}_{spez_2} erreichen läßt: Wir verlangen, daß zu geraden Abtastzeitpunkten das Ausgangssymbol $z_d^{(2)}$ auftritt. Einen das spezifizierte Verhalten realisierenden tick-Automaten Aut_{spez_2} sieht man in Bild 2.43.

Der erste Schritt bei der Lösung dieser veränderten Aufgabenstellung besteht wiederum in der Bildung des synchronen Produkts von Strecken- und Spezifikationsautomat: $Aut = Aut_S \parallel Aut_{spez_2}$ (den erreichbaren Teil sieht man in Bild 2.44). Jetzt ist $\{Real_i(Aut)\}$ nichtleer. Das größte Element $G(Real_i(Aut))$ ist in Bild 2.45 gezeigt: Nach dem Auftreten des Meßsymbols $y_d^{(1)}$ wird das Stellsymbol $u_d^{(1)}$ verboten. Damit wird als nächstes Ausgangs-

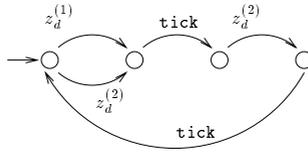


Bild 2.43: tick-Automat $Aut_{spe z_2}$ für $B_{spe z_2}$.

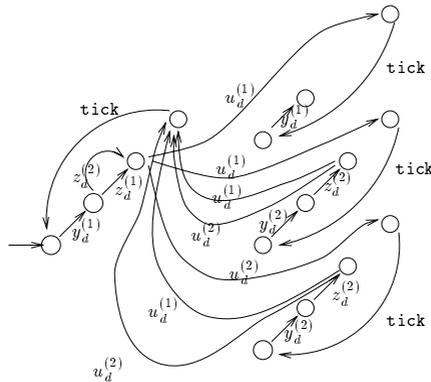


Bild 2.44: tick-Automat $Aut = Aut_S || Aut_{spe z_2}$ (erreichbarer Teil).

symbol $z_d^{(2)}$ erzwungen, als nächstes Meßsymbol erscheint $y_d^{(2)}$. Nach dessen Auftreten wird das Verbot wieder rückgängig gemacht – beide Werte des Stellsignals dürfen angewandt werden.

Das Reglerverhalten erhält man explizit, indem man alle z_d -Transitionen aus $G(Real_i(Aut))$ „herausprojiziert“ – der resultierende tick-Automat ist in Bild 2.46 dargestellt. Einen äquivalenten getakteten Moore-Automaten zeigt Bild 2.47.

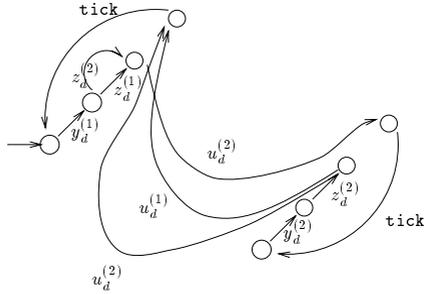
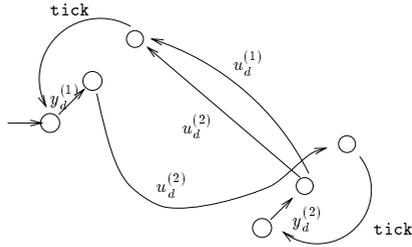
Bild 2.45: tick-Automat $G(\text{Real}_i(\text{Aut}))$.

Bild 2.46: tick-Automat für das Reglerverhalten.

2.5.4 Verschaltbarkeit von diskretem Regler und hybridem Streckenmodell

In Abschnitt 2.5.3 wurde ein Verfahren vorgestellt, mit dessen Hilfe sich für eine diskrete Abstraktion DA_v des hybriden Streckenmodells DM der minimal restriktive diskrete Regler berechnen läßt, der die Spezifikationen noch erfüllt. Die dem Entwurf zugrundeliegende diskrete Streckenapproximation genügt der Reduktionsbedingung $\mathcal{B}(DM) \subseteq \mathcal{B}(DA_v)$; aus $\mathcal{B}(DA_v) \cap \mathcal{B}_R \subseteq \mathcal{B}_{spez}$ (die geregelte diskrete Abstraktion genügt den Vorgaben) folgt deshalb

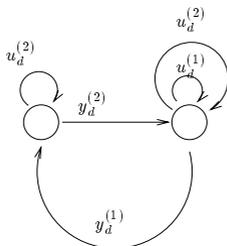


Bild 2.47: Moore-Automat für das Reglerverhalten.

sofort $\mathcal{B}(DM) \cap \mathcal{B}_R \subseteq \mathcal{B}_{spez}$ (das geregelte hybride Streckenmodell weist keine unzulässigen Verhaltensmuster auf). Nun muß man nur noch sicherstellen, daß $\mathcal{B}(DM) \cap \mathcal{B}_R \neq \emptyset$ (Regler und hybrides Streckenmodell lassen sich verschalten). Diese Eigenschaft kann man bei zeitgetriebenen Systemen „fast immer“ voraussetzen, sie läßt sich im vorliegenden Fall aber auch leicht zeigen: Die einzige Eingriffsmöglichkeit des Reglers besteht im „Verbieten“ von Stellsymbolen $\tilde{u}_d^{(j)} \in \tilde{U}_d$. Verschaltbarkeit ist offenbar garantiert, wenn der Regler zu keinem Zeitpunkt *alle* Stellsymbole $\tilde{u}_d^{(j)} \in \tilde{U}_d$ unterbindet; dies ist aber gewährleistet da $G(Real_i(Aut))$ andernfalls zeitlich blockierend wäre.

2.6 Zusammenfassung

Der in diesem Kapitel verfolgte Ansatz zur Regelung hybrider Systeme besteht aus zwei sukzessiv auszuführenden Schritten: Man beschafft sich zuerst eine diskrete Abstraktion des kontinuierlichen oder hybriden Prozesses und wendet anschließend Methoden der ereignisdiskreten Regelungstheorie an, um eine geeignete Rückführung auszulegen.

Betrachtet man das Problem „durch die Brille“ der *Willemsschen* Systemtheorie (Abschnitt 2.2), so findet man eine einfache *Reduktionsbedingung*; ihr muß die diskrete Abstraktion genügen, wenn sie als Grundlage für den Reglerentwurf dienen soll. Sie verlangt, daß das Verhalten des diskreten (d.h. vereinfachten bzw. reduzierten) Modells das Verhalten des unterlagernten kontinuierlichen oder hybriden Modells einschließt – jede Kombination

von Systemsignalen, die das detaillierte Modell zuläßt, muß auch mit dem reduzierten Modell „verträglich“ sein. Ist die Reduktionsbedingung erfüllt, und gelingt es, für die diskrete Abstraktion einen die Einhaltung der Spezifikationen erzwingenden Regler zu entwerfen, so kann man garantieren, daß dieser Regler auch am ursprünglichen kontinuierlichen oder hybriden System zufriedenstellend arbeitet. Auf diese Art und Weise entkoppelt man die beiden Schritte des untersuchten Ansatzes – diskrete Abstraktion und diskreter Reglerentwurf können unabhängig voneinander durchgeführt werden.

Zunächst drängt sich die Frage auf, ob die Reduktion eines kontinuierlichen (oder hybriden) Systems auf ein diskretes Modell unter Umständen ohne Verlust an Genauigkeit möglich ist: Existiert ein diskretes Modell, dessen Verhalten mit dem des kontinuierlichen (oder hybriden) Systems übereinstimmt? In diesem Fall wäre die Reduktionsbedingung trivialerweise erfüllt. Im formalen Rahmen mengendynamischer Systeme – eines Systembegriffs, der kontinuierliche, diskrete und hybride dynamische Modelle umfaßt – kann man sich leicht Bedingungen überlegen, unter denen eine solche exakte Modellreduktion erfolgen kann (Abschnitt 2.3). Obwohl diese Bedingungen von einem einfachen Beispielsystem („schaltender Abfluß“) erfüllt werden, erweisen sie sich als überaus restriktiv. Im allgemeinen müssen wir uns deshalb mit diskreten Abstraktionen begnügen, die eine *echte* Approximation darstellen, also einen Verlust an Genauigkeit bewirken.

In Abschnitt 2.4 betrachteten wir den kontinuierlichen Anteil der Regelstrecke und leiteten für diesen eine Hierarchie (eine im Sinne der Modellgenauigkeit vollständig geordnete Menge) von approximierenden getakteten Moore-Automaten her. Jedes Element dieser Hierarchie erfüllt die Reduktionsbedingung. Das oberste Element der Hierarchie ist die im Sinne der Modellgenauigkeit „größte“ (gleichzeitig aber auch am wenigsten komplexe) Approximation des kontinuierlichen Systemverhaltens. Je „tiefer“ eine diskrete Abstraktion in der Hierarchie angesiedelt ist, desto genauer gibt sie das Verhalten des kontinuierlichen Systems wieder, desto mehr Zustände weist der approximierende Automat aber auf. Weiterhin wurde gezeigt, daß die Ordnung der Modellhierarchie invariant bezüglich „Verschaltung“ mit einem anderen dynamischen System ist. Beschafft man sich also diskrete Abstraktionen des hybriden Gesamtsystems, indem man die diskreten Abstraktionen des kontinuierlichen Anteils mit der diskreten Streckenkomponente verknüpft, so bleibt die hierarchische Ordnung (und die Gültigkeit der Reduktionsbedingung) erhalten. Innerhalb dieser vollständig geordneten Menge von Abstraktionen existiert ein eindeutig definiertes „größtes“ (und

damit auch einfachstes) Modell, mit dem sich die vorgegebenen Spezifikationen erfüllen lassen. Dieses stellt zweifellos die für den Reglerentwurf ideale (weil ökonomischste) Grundlage dar. Eine interessante (aber noch offene) Frage ist: Kann man dieses Modell bestimmen, ohne die Hierarchie von oben nach unten zu „durchsuchen“?

Der Regler kann nun mit Methoden der ereignisdiskreten Systemtheorie entworfen werden (Abschnitt 2.5). Hierzu transformieren wir die in Form eines getakteten nichtdeterministischen Moore-Automaten vorliegende diskrete Streckenabstraktion in eine äquivalente – der rechnerischen Behandlung aber eher zugängliche – Darstellung: einen sogenannten tick-Automaten. Anhand dieses Streckenmodells und der (in gleicher Weise formulierten) Spezifikationen kann dann mittels einer formalen Prozedur entschieden werden, ob ein die Vorgaben erfüllender diskreter Regler existiert. Ist dies der Fall, so berechnet der beschriebene Algorithmus die am wenigsten restriktive Rückführung. Weil die dem Entwurf zugrundeliegende Abstraktion die Reduktionsbedingung erfüllt und Verschaltbarkeit von Regler und unterlagertem hybridem Streckenmodell gewährleistet ist, wird der so entworfene Regler die Einhaltung der Spezifikationen auch erzwingen, wenn er an der hybriden Regelstrecke eingesetzt wird.

2.7 Literaturhinweise

Ansätze zur Approximation kontinuierlicher dynamischer Abtastsysteme durch nichtdeterministische Automaten wurden erstmals von *Antsaklis, Stiver* und *Lemmon* [42, 2] sowie von *Lunze* [20, 21, 22] vorgeschlagen. In den genannten Arbeiten wird der Zustandsraum des zu approximierenden Systems in „Zellen“ (Äquivalenzklassen) unterteilt, von denen jede als Zustand eines approximierenden Automaten aufgefaßt wird. Dieser Sachverhalt ergibt sich als „Grenzfall“ unseres Approximationsschemas, wenn

1. $q_y = Q_y$, d.h. wenn jede Komponente des kontinuierlichen Zustands in quantisierter Form gemessen wird (vgl. Seite 47), und wenn
2. $v = 0$, d.h. wenn die gröbste Approximation der in Bild 2.29 gezeigten Hierarchie diskreter Abstraktionen betrachtet wird.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß bei einer solchen Beschränkung auf das „gröbstmögliche“ diskrete Ersatzmodell in vielen Fällen kein adäquater, die

Einhaltung der Spezifikationen bewirkender Regler gefunden werden kann. *Lunze* [21] vergrößert deswegen die im Automatenmodell enthaltene Information, indem er den Zustandsübergängen Wahrscheinlichkeiten zuordnet. Dies führt allerdings nur dann zu einer Verbesserung, wenn auch Spezifikationen stochastisch formuliert werden können, wenn man also von der im Rahmen der vorliegenden Arbeit verfolgten „worst case“ Philosophie abgeht. Wie ein solches stochastisches Automatenmodell genutzt werden kann, um durch Minimierung von Gütefunktionalen einen diskreten Regler zu entwerfen, wird in [19] beschrieben. Ein duales Problem – die Rekonstruktion von nicht meßbaren Zuständen eines approximierenden Automaten aus Folgen von Eingangs- und Meßsymbolen – wird in [18] behandelt.

Andere Möglichkeiten, diskrete Modelle aus kontinuierlichen Systemen abzuleiten, werden in [24, 25] und [41] diskutiert. Beide Ansätze sind ereignis- statt zeitgetrieben: Das Überschreiten von Partitions Grenzen im kontinuierlichen Zustandsraum löst Ereignisse aus, die zu einem „Schalten“ der diskreten Approximation führen. Während [24, 25] sich auf eine rein logische Approximation beschränkt (es interessiert nur die Reihenfolge, in der die diskreten Zustände durchlaufen werden, nicht aber die zugehörige Zeitinformation), wird in [41] die Ableitung zeitbehafteter diskreter Modelle behandelt.

Caines und *Wei* schlagen eine weitere interessante Alternative vor: In [7, 8] werden Stelleingriffe der unterlagerten (kontinuierlichen) Ebene eingesetzt, um nichtdeterministische Phänomene auf der Ebene der diskreten Approximation zu eliminieren.

Eine Übersicht über die *Willemssche* Systemtheorie findet man in den Aufsätzen [43, 44, 45, 46]. Das einführende Beispiel zu diesem Thema auf Seite 14 stammt aus [31]. Der Begriff eines „mengendynamischen Systems“ wurde von *Sain* [40] geprägt. Auf diese Quelle gehen auch die Ausführungen zur exakten Modellreduktion in Abschnitt 2.3.2.3 zurück. Die einführenden Beispiele zu diesem Themenkreis – „Schaltender Zufluß“ und „Schaltender Abfluß“ – wurden den Arbeiten von *Chase*, *Serrano* und *Ramadge* [10, 11, 12] entnommen. Die in Abschnitt 2.4 beschriebene Methode zur Approximation kontinuierlicher bzw. hybrider Systeme basiert auf einer Reihe von Arbeiten, die vom Verfasser gemeinsam mit *S. O’Young* erstellt wurden [29, 30, 32, 34, 35, 36]. Eine erste Version des in Abschnitt 2.5 diskutierten Verfahrens zum diskreten Reglerentwurf findet sich in [33]. Die Implementierung des Algorithmus zur Reglersynthese wurde von *S. O’Young* durchgeführt; sie basiert auf seinen eigenen in [26] beschriebenen Voruntersuchungen. Die grundlegenden Arbeiten zur Synthese ereignisdiskreter

Rückführungen gehen auf *Ramadge* und *Wonham* zurück. Eine Darstellung ihrer Entwurfsphilosophie findet man in [37, 47, 38]. Eine Erweiterung ihres Ansatzes auf zeitbehaftete diskrete Systeme wird in [6] vorgestellt. Eine sehr schöne Übersicht über verschiedene Aspekte der Analyse und Synthese ereignisdiskreter Systeme bietet schließlich [9].

- [1] *Alur, R., Henzinger, T. A. und Sontag, E. D. (Hrsg.): Hybrid Systems III – Verification and Control*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1066. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] *Antsaklis, P. J., Stiver, J. A. und Lemmon, M.:* Hybrid system modeling and autonomous control systems. In [15], S. 366-392.
- [3] *Antsaklis, P. J., Kohn, W., Nerode, A. und Sastry, S. (Hrsg.): Hybrid Systems II*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 999. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [4] *Antsaklis, P., Kohn, W., Nerode, A. und Sastry, S. (Hrsg.): Hybrid Systems IV*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [5] *Ayer, A.J.: Philosophy in the Twentieth Century*, George Weidenfeld & Nicolson Ltd., 1982.
- [6] *Brandin, B. A. und Wonham, W. M.:* Supervisory control of timed Discrete Event Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 39:329–342, 1994.
- [7] *Caines, P. E. und Wei, Y.-J.:* On dynamically consistent hybrid systems. In [3].
- [8] *Caines, P. E. und Wei, Y.-J.:* Hierarchical hybrid control systems: a lattice theoretic formulation. 1996. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [9] *Cassandras, C. G., Lafortune, S. und Olsder, G. J.:* Introduction to the modelling, control and optimization of Discrete Event Systems. In A. Isidori (Hrsg.) *Trends in Control – A European Perspective*, S. 217–291. Springer-Verlag, 1995.

- [10] *Chase, C. und Ramadge, P.J.:* Dynamics of a switched n buffer system. In Proc. 28th Allerton Conference on Communication, Control and Computing, S. 455–464, 1990.
- [11] *Chase, C., Serrano, J. und Ramadge, P.J.:* Interesting examples of supervised continuous variable systems. In 29th Conference on Decision and Control, S. 3410–3411, Honolulu, 1990. IEEE.
- [12] *Chase, C., Serrano, J. und Ramadge, P.J.:* Periodicity and chaos from switched flow systems: Contrasting examples of discretely controlled continuous systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 38:70–83, 1993.
- [13] *Devaney, R. L.:* *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd edition.* Addison-Wesley, New York, 1989.
- [14] *Feyerabend, P.:* *Wider den Methodenzwang,* Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1976.
- [15] *Grossman, R. L., Nerode, A., Ravn, A. P. und Rischel, H. (Hrsg.):* *Hybrid Systems,* Lecture Notes in Computer Science, Vol. 736. Springer-Verlag, 1993.
- [16] *Kailath, T.:* *Linear Systems.* Prentice-Hall, 1980.
- [17] *Kuhn, T.S.:* The structure of scientific revolutions. International Encyclopedia of Unified Science, Vol. 2, Number 2, 1962.
- [18] *Lichtenberg, G. und Lunze, J.:* Observation of qualitative states by means of a qualitative model. Forschungsbericht 95.5, Technische Universität Hamburg-Harburg, Arbeitsbereich Regelungstechnik. Zur Veröffentlichung angenommen in: International Journal of Control, 1997.
- [19] *Lichtenberg, G., Lunze, J. und Stöckel, D.:* Entwurf qualitativer Regelungen mit Hilfe qualitativer Modelle. at – Automatisierungstechnik, 45:66–74, 1997.
- [20] *Lunze, J.:* Ein Ansatz zur qualitativen Modellierung und Regelung dynamischer Systeme. at – Automatisierungstechnik, 41:451–460, 1993.

- [21] *Lunze, J.*: Qualitative modelling of linear dynamical systems with quantized state measurements. *Automatica*, 30:417–431, 1994.
- [22] *Lunze, J.*: Stabilization of nonlinear systems by qualitative feedback controllers. *International Journal of Control*, 62:109–128, 1995.
- [23] *MacLane, S. und Birkhoff, G.*: *Algebra*. MacMillan, New York, 1967.
- [24] *Niinomi, T., Krogh, B. H. und Cury, J. E. R.*: Synthesis of Supervisory Controllers for Hybrid Systems Based on Approximating Automata. In *Proc. 34th Conference on Decision and Control*, S. 1461–1466, 1995. IEEE.
- [25] *Niinomi, T., Krogh, B. H. und Cury, J. E. R.*: Refinements of approximating automata for synthesis of supervisory controllers for hybrid systems. In [1]. S. 475–484.
- [26] *O’Young, S. D.*: Object TCT: A user’s guide. Systems Control Group Report #9312, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, 1993.
- [27] *Pappas, G. J. und Sastry, S.*: Towards continuous abstractions of dynamical and control systems. Technical Report UCB/ERL M96/53, University of California at Berkeley, Oktober 1996.
- [28] *Popper, R. K.*: *Logik der Forschung*, zweite, erweiterte Auflage, Julius Springer-Verlag, Wien, 1935.
- [29] *Raisch, J. und O’Young, S. D.*: A discrete-time framework for control of hybrid systems. *Proc. 1994 Hong Kong Int. Workshop New Directions of Control and Manufacturing*, S. 34–40, Hong Kong, 1994.
- [30] *Raisch, J. und O’Young, S. D.*: Symbolic control of uncertain hybrid systems. In *Proc. 3rd European Control Conference*, S. 2041–2046, 1995.
- [31] *Raisch, J. und Francis, B. A.*: Modeling deterministic uncertainty. In: *The Control Handbook (Levine, W. S. (Hrsg.))*, S. 551–560, CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [32] *Raisch, J. und O’Young, S. D.*: A DES approach to control of hybrid dynamical systems. In [1], S. 563–574.

- [33] *Raisch, J. und O'Young, S. D.:* Time-driven supervisory control of hybrid dynamical systems. Proc. 5th International Conference on CONTROL'96, IEE, Exeter, UK. 1996, S. 716-721.
- [34] *Raisch, J. und O'Young, S. D.:* A Totally Ordered Set of Discrete Abstractions for a given Hybrid or Continuous System. Erscheint in [4].
- [35] *Raisch, J. und O'Young, S. D.:* Discrete approximation and supervisory control of continuous systems. Zur Veröffentlichung angenommen in IEEE Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems.
- [36] *Raisch, J.:* Nondeterministic automata as approximations for continuous systems – an approach with an adjustable degree of accuracy. Proc. 2nd MATHMOD (International Symposium on Mathematical Modelling), IMACS, Vienna, Austria. Februar 1997. S. 195–202.
- [37] *Ramadge, P. J. und Wonham, W. M.:* Supervisory control of a class of discrete event systems. SIAM J. Control and Optimization, 25:206–230 1987.
- [38] *Ramadge, P. J. und Wonham, W. M.:* The control of discrete event systems. Proceedings of the IEEE, 77:81–98 , 1989.
- [39] *Ramadge, P. J.:* On the periodicity of symbolic observations of piecewise smooth discrete-time processes. IEEE Transactions on Automatic Control, 35:807–813, 1990.
- [40] *Sain, M. K.:* *Introduction to Algebraic System Theory.* Academic Press, New York, 1981.
- [41] *Stursberg, O., Kowalewski, S. und Engell, S.:* Generating timed discrete models of continuous systems. Proc. 2nd MATHMOD (International Symposium on Mathematical Modelling), IMACS, Vienna, Austria. Februar 1997. S. 203–209.
- [42] *Stiver, J. A. und Antsaklis, P. J.:* Modeling and analysis of hybrid control systems. In Proc. 31st IEEE Conference on Decision and Control, 1992.
- [43] *Willems, J. C.:* From time series to linear system – Part I. Finite dimensional linear time invariant systems. Automatica, 22:561–580, 1986.

- [44] *Willems, J. C.*: From time series to linear system – Part II. Exact Modelling. *Automatica*, 22:675–694, 1986.
- [45] *Willems, J. C.*: From time series to linear system – Part III. Approximate Modelling. *Automatica*, 23:87–115, 1987.
- [46] *Willems, J. C.*: Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:259–294, 1991.
- [47] *Wonham, W. M.*: A control theory for discrete-event systems. In Denham, M. J. und Laub, A. J. (Hrsg.), *Advanced Computing Concepts and Techniques in Control Engineering*, S. 129–169. Springer-Verlag NATO ASI Series, New York, 1988.

‘The behaviour of a bicycle that has a high content of humanity,’ he said, ‘is very cunning and entirely remarkable. You never see them moving by themselves but you meet them in the least accountable places unexpectedly. Did you never see a bicycle leaning against the dresser of a warm kitchen when it is pouring outside?’
‘I did.’
‘Not very far away from the fire?’
‘Yes.’
‘Near enough to the family to hear the conversation?’
‘Yes.’
‘Not a thousand miles from where they keep the eatables?’
– Flann O’Brien: The Third Policeman

Kapitel 3

Die „klassische“ Sichtweise

3.1 Einführung

In diesem Kapitel betrachten wir die in Abschnitt 1.1.1 skizzierte Problemstellung: Das Streckenmodell sei rein kontinuierlich und werde durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben; es soll durch eine Rückführung diskreter (symbolischer) Meßinformation auf diskrete (symbolische) Stellgrößen geregelt werden. Eventuell vorhandene kontinuierliche Regelkreise denkt man sich in die Strecke integriert. Der Regler „sieht“ also nur eine quantisierte Version y_d des Ausgangssignals y (z.B. „Temperatur ist zu hoch“, „in Ordnung“ oder „zu niedrig“). Er generiert ein stückweise konstantes Signal $u_d(t)$ mit endlichem (symbolischem) Bildbereich U_d (z.B. „Ventil offen“

bzw. „geschlossen“). Dieses symbolische Stellsignal bestimmt die zeitliche Entwicklung des Streckenzustands. Die Quantisierung von Stell- und Meßsignal kann beliebig grob sein. Der Übersichtlichkeit halber ist dieser Sachverhalt in Bild 3.1 nochmals dargestellt. Dem Unterschied zwischen Bild 1.1 und Bild 3.1 kommt lediglich untergeordnete Bedeutung zu: Die die symbolische Stellvariable in eine numerische Größe übersetzende Injektion wird in die Strecke integriert; das externe Eingangssignal entfällt, da es für die im folgenden angestellten Überlegungen zur Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit und Erreichbarkeit keine Rolle spielt.

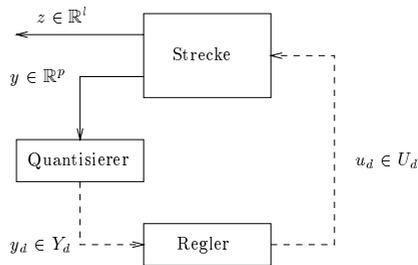


Bild 3.1: Regelung einer kontinuierlichen Strecke durch symbolische Rückführung.

Dieses Szenario läßt sich mit dem Schlagwort „ereignisgetriebene Abtastung“ beschreiben: Der Informationsaustausch zwischen Regler und Strecke konzentriert sich auf diskrete (aber i.a. nicht äquidistante) Zeitpunkte und kann deswegen als besonders ökonomische, Interrupt-basierte Kommunikationsstruktur interpretiert werden – der Regler wird genau dann „benachrichtigt“, wenn sich ein Meßsymbol ändert; er gibt genau dann Information an die Strecke weiter, wenn er das symbolische Stellsignal ändern möchte. Beide Ereignisse können zu beliebigen Zeiten $t \in \mathbb{R}^+$ auftreten – eine Annahme, die immer dann gerechtfertigt ist, wenn Takt- und Verarbeitungszeiten des reglerinternen Prozessors im Vergleich zu den Streckenzeitkonstanten als vernachlässigbar klein angesehen werden können. Im Rahmen der „ereignisgetriebenen Abtastung“ wird der Informationsfluß zwischen Strecke und Regler also durch zeitbehafte (Meß- und Stell-) Ereignisse repräsentiert. Wir werden intuitiv einsichtige Bedingungen angeben, unter denen

sich der kontinuierliche Zustand des Streckenmodells aus einer Folge solcher Meß-Ereignisse *exakt* rekonstruieren läßt; weiterhin werden wir die Frage erörtern, welche Gebiete des kontinuierlichen Streckenzustandsraums mittels diskreter Stell-Ereignisse steuerbar bzw. erreichbar sind. Auf der Grundlage dieser Resultate läßt sich dann eine einfache modellprädiktive Regelungsstrategie angeben: Dem Regler wird ein kontinuierliches Modell der Strecke zur Verfügung gestellt; mit dessen Hilfe rekonstruiert er aus der beobachteten Sequenz von Meß-Ereignissen den Streckenzustand und berechnet hieraus eine Folge zukünftiger Stell-Ereignisse, die den (geschätzten) Streckenzustand bzw. das (geschätzte) externe Ausgangssignal z in der gewünschten Art und Weise manipulieren. Tritt ein neues Meß-Ereignis ein, so wird es dazu benutzt, die Zustandsschätzung zu aktualisieren und die geplante Eingriffsstrategie zu revidieren.

Die Entwicklung des hier vorgestellten „ereignisgetriebenen“ Ansatzes wurde in [9, 11, 12] begonnen. Die im folgenden präsentierte Version stützt sich im wesentlichen auf [13] und [14].

3.2 Der Regelkreis

3.2.1 Das Streckenmodell

Wir beschränken uns auf eine Klasse von Streckenmodellen, die einen gangbaren Kompromiß zwischen zwei regelungstechnischen Kernforderungen darstellt: Die Modellannahmen müssen eine analytische Behandlung (in unserem Falle: eine analytische Behandlung von globalen Beobachtbarkeits-, Steuerbarkeits- und Erreichbarkeitseigenschaften) zulassen, trotzdem aber so allgemein sein, daß charakteristische Eigenschaften vieler realer Regelungsprobleme wenigstens ansatzweise erfaßt werden. Durch gewöhnliche (vektorielle) Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = a(u_d(t)) x(t) + g(u_d(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

beschriebene Streckenmodelle stellen einen solchen Kompromiß dar. u_d ist ein stückweise konstantes Signal mit endlichem (symbolischem) Wertebereich U_d :

$$u_d(t) \in U_d = \left\{ u_d^{(1)}, \dots, u_d^{(N)} \right\}.$$

Die Funktionen a und g ordnen jedem Stellsymbol $u_d \in U_d$ eine reelle $n \times n$ -Matrix (eine „Dynamik-Matrix“) und einen reellen n -Vektor (einen „Anregungsterm“) zu:

$$\begin{aligned} a &: U_d \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \\ g &: U_d \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die Funktion $(a, g) : U_d \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$ sei injektiv (d.h. für jedes Stellsymbol erhält man eine andere Kombination von Dynamikmatrix und Anregungsterm); für die Funktionen a und g selbst wird hingegen keine derartige Annahme getroffen. Nun führt man folgende Schreibweise ein:

$$\begin{aligned} \{A_1, \dots, A_P\} &:= \text{Bild}(a), \\ U_{d_i} &:= \left\{ u_d^{(k)} \in U_d \mid a(u_d^{(k)}) = A_i \right\}, \\ \{b_{i_1}, \dots, b_{i_{N_i}}\} &:= \text{Bild}(g|_{U_{d_i}}); \end{aligned}$$

$g|_{U_{d_i}}$ steht hierbei für die Beschränkung der Funktion g auf die Teilmenge U_{d_i} ihres Definitionsbereichs U_d (Bild 3.2). Offensichtlich gilt: $\sum_{i=1}^P N_i = N$.

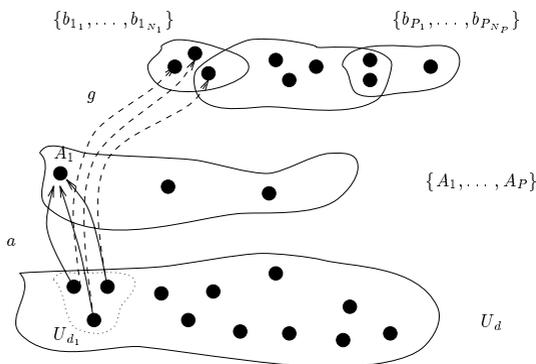


Bild 3.2: Funktionen a und g .

Der Rang der reellen $n \times N_i$ -Matrix $[b_{i_1}, \dots, b_{i_{N_i}}]$ werde mit q_i bezeichnet. Man beschaffe sich eine Basis B_i für den q_i -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^n ,

der durch die Vektoren b_{i_k} , $k = 1, \dots, N_i$, aufgespannt wird und schreibe

$$[b_{i_1}, \dots, b_{i_{N_i}}] = B_i [u_{i_1}, \dots, u_{i_{N_i}}].$$

Die u_{i_k} , $k = 1, \dots, N_i$, stellen offenbar N_i verschiedene Punkte im \mathbb{R}^{q_i} dar.

Beschränkt man $u_d(t)$ also auf die Menge U_{d_i} , so läßt sich der betrachtete Sachverhalt noch einfacher interpretieren – (3.1) reduziert sich dann auf folgende Klasse von Streckenmodellen:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u_i(t); \quad (3.2)$$

u_i ist hierbei ein stückweise konstantes, auf der diskreten Menge $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_{N_i}}\} \subset \mathbb{R}^{q_i}$ „lebendes“ Signal. Gl. (3.2) ist „ein alter Freund“ aus der linearen Regelungstheorie – der einzige Unterschied zu der von dort vertrauten Situation besteht in der Tatsache, daß die Stellgröße nur eine endliche Zahl von diskreten Werten aus \mathbb{R}^{q_i} annehmen kann. Ein Umspringen des Stellsymbols $u_d(t)$ in (3.1) von der Menge U_{d_i} auf die Menge U_{d_j} impliziert ein Umschalten der „Modellparameter“ in (3.2) von (A_i, B_i) auf (A_j, B_j) sowie eine Änderung der möglichen reellwertigen Steleingriffe von $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_{N_i}}\} \subset \mathbb{R}^{q_i}$ auf $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_{N_j}}\} \subset \mathbb{R}^{q_j}$.

Wir setzen weiterhin voraus, daß der momentane Wert der Zustandsvariablen linear in externes und internes Streckenausgangssignal eingehet:

$$z(t) = C_z x(t), \quad (3.3)$$

$$y(t) = C_y x(t). \quad (3.4)$$

Allgemeinere Ausgangsgleichungen (bei denen die rechten Seiten auf beliebige Art und Weise von $u_d(t)$ abhängen können, aber affin in $x(t)$ sind) verursachen keine zusätzlichen Probleme, würden aber die ohnehin schon recht komplexe Notation noch unübersichtlicher erscheinen lassen.

Beispiel: Man betrachte die in Bild 3.3 gezeigte, aus drei kommunizierenden Tanks bestehende Regelstrecke. Die Zustände x_1 , x_2 und x_3 beschreiben die Abweichungen der Wasserspiegel in Tank A, B und C von einem gemeinsamen Referenzwert. Ventil 1 und 2 sind entweder vollständig geöffnet („auf“) oder vollständig geschlossen („zu“). Das durch eine Pumpe realisierte Stellsignal kann fünf verschiedene Werte annehmen: Wasser kann (mit konstantem Volumenstrom r) aus einer gemeinsamen Quelle in Tank

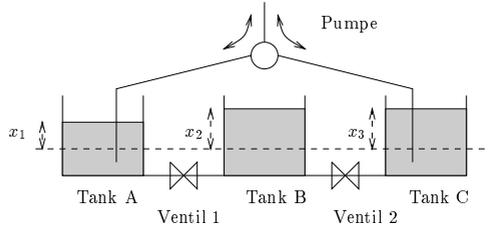


Bild 3.3: Beispiel: Drei-Tank-System.

A oder C gepumpt werden, Wasser kann (mit konstantem Volumenstrom r) aus Tank A oder C abgepumpt werden, die Pumpe kann abgeschaltet werden. Im vorliegenden Beispiel besteht U_d also aus $2 \cdot 2 \cdot 5$ Symbolen (Tabelle 3.1).

Unter der Annahme, daß der Volumenstrom zwischen benachbarten Tanks proportional zu der Differenz ihrer Wasserstände ist, erhält man für die Funktionen a und g in (3.1):

$$A_1 := a(u_d^{(k)}) = \begin{bmatrix} -\bar{a} & \bar{a} & 0 \\ \bar{a} & -(\bar{a} + \bar{b}) & \bar{b} \\ 0 & \bar{b} & -\bar{b} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, 5,$$

$$b_{1_1} := g(u_d^{(1)}) = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_{1_2} := g(u_d^{(2)}) = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_{1_3} := g(u_d^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad b_{1_4} := g(u_d^{(4)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix},$$

$$b_{1_5} := g(u_d^{(5)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

⋮

$u_d^{(1)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 auf“ & „Wasser in A pumpen“
$u_d^{(2)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 auf“ & „Wasser aus A abpumpen“
$u_d^{(3)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 auf“ & „Wasser in C pumpen“
$u_d^{(4)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 auf“ & „Wasser aus C abpumpen“
$u_d^{(5)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 auf“ & „Pumpe abschalten“
$u_d^{(6)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser in A pumpen“
$u_d^{(7)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser aus A abpumpen“
$u_d^{(8)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser in C pumpen“
$u_d^{(9)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser aus C abpumpen“
$u_d^{(10)}$:=	„Ventil 1 auf“ & „Ventil 2 zu“ & „Pumpe abschalten“
\vdots		\vdots
$u_d^{(16)}$:=	„Ventil 1 zu“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser in A pumpen“
$u_d^{(17)}$:=	„Ventil 1 zu“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser aus A abpumpen“
$u_d^{(18)}$:=	„Ventil 1 zu“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser in C pumpen“
$u_d^{(19)}$:=	„Ventil 1 zu“ & „Ventil 2 zu“ & „Wasser aus C abpumpen“
$u_d^{(20)}$:=	„Ventil 1 zu“ & „Ventil 2 zu“ & „Pumpe abschalten“

Tabelle 3.1: Mögliche Stellsymbole.

$$A_4 := a(u_d^{(k)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 16, \dots, 20,$$

$$\begin{aligned} b_{4_1} &:= g(u_d^{(16)}) = g(u_d^{(1)}), & b_{4_2} &:= g(u_d^{(17)}) = g(u_d^{(2)}), \\ b_{4_3} &:= g(u_d^{(18)}) = g(u_d^{(3)}), & b_{4_4} &:= g(u_d^{(19)}) = g(u_d^{(4)}), \\ b_{4_5} &:= g(u_d^{(20)}) = g(u_d^{(5)}). \end{aligned}$$

Der Rang der Matrix $[b_{i_1}, \dots, b_{i_5}]$ beträgt 2 (für $i = 1, \dots, 4$); man kann also schreiben:

$$[b_{i_1}, \dots, b_{i_5}] = \underbrace{\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}}_{B_i} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{[u_{i_1} \dots u_{i_5}]}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Werden zur Formulierung regelungstechnischer Ziele alle Zustände des Streckenmodells benötigt, so definiert man die externe Ausgangsgröße als

$$z(t) := x(t) .$$

Nimmt man weiterhin an, daß nur ein Sensor zur Verfügung steht, der den Wasserstand in Tank A (in quantisierter Form – s. Abschnitt 3.2.2) mißt, so lautet die Gleichung für die interne Streckenausgangsgröße

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t) .$$

3.2.2 Quantisierung, Meß- und Stell-Ereignisse

Der Quantisierer ordnet jedem Streckenausgangsvektor $y(t) \in \mathbb{R}^p$ zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ auf eindeutige Weise ein Symbol $y_d(t) \in \{y_d^{(1)}, \dots, y_d^{(M)}\}$ zu. Die Funktion $Q : \mathbb{R}^p \rightarrow \{y_d^{(1)}, \dots, y_d^{(M)}\}$ unterteilt den Raum \mathbb{R}^p also in M paarweise disjunkte Teilmengen (oder „Zellen“) Y_l , $l = 1, \dots, M$. Alle Untersuchungen lassen sich prinzipiell für einen allgemeinen Quantisierer Q durchführen. Praktisch relevant ist aber nur Fall, bei dem die Zellen der Quantisierungsfunktion Q halboffene, durch Hyperebenen $y_i = y_i^{(r)}$, $r = 1, \dots, M_i - 1$, $i = 1, \dots, p$, voneinander abgegrenzte „Quader“ im \mathbb{R}^p sind (Bild 3.4). Die Notation der folgenden Abschnitte vereinfacht sich, wenn das „skalare Symbol“ $y_d(t)$ durch ein „Vektorsymbol“ $[y_{d_1}(t) \ \dots \ y_{d_p}(t)]$ ersetzt wird. Dies entspricht einem Ersetzen des Quantisierers Q für den Vektor $y(t)$ durch unabhängige Quantisierer Q_i für die Elemente $y_i(t)$ von $y(t)$, $i = 1, \dots, p$. Die Funktion

$$Q_i : \mathbb{R} \rightarrow \{y_{d_i}^{(1)}, \dots, y_{d_i}^{(M_i)}\}, \quad \prod_{i=1}^p M_i = M, \quad (3.5)$$

ordnet jedem y_i innerhalb eines gegebenen Intervalls das Symbol $y_{d_i}^{(r)}$ zu (Bild 3.5).

$$Q_i(y_i) = \begin{cases} y_{d_i}^{(1)} & \text{für } -\infty < y_i \leq y_i^{(1)} \\ y_{d_i}^{(r)} & \text{für } y_i^{(r-1)} < y_i \leq y_i^{(r)}, \quad r = 2, \dots, M_i - 1 \\ y_{d_i}^{(M_i)} & \text{für } y_i^{(M_i-1)} < y_i < \infty. \end{cases} \quad (3.6)$$

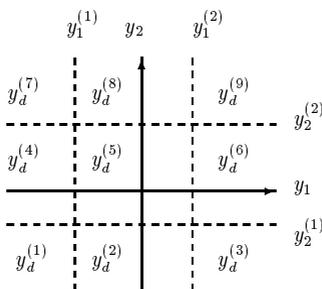


Bild 3.4: Ausgangsquantisierung.

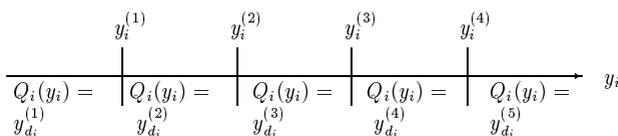


Bild 3.5: Elementweises Quantisieren des Streckenausgangs y .

Da die Zeit t kontinuierlich verläuft, weiß man genau, zu welchen Zeitpunkten Komponenten des quantisierten Signals $y_d(t)$ ihren Wert ändern. Dies wiederum impliziert *präzise* (wenngleich unvollständige) Information über die kontinuierliche Variable y . Ändert sich z.B. der Wert von $Q_i(y_i)$ zum Zeitpunkt t_k^y von $y_{d_i}^{(r)}$ auf $y_{d_i}^{(r+1)}$ (oder von $y_{d_i}^{(r+1)}$ auf $y_{d_i}^{(r)}$), so muß y_i für $t = t_k^y$ gerade die Quantisierungsschwelle $y_i^{(r)}$ erreicht haben:

$$Q_i(y_i(t_k^y)) = y_{d_i}^{(r)} \quad \& \quad \lim_{(\epsilon > 0) \rightarrow 0} Q_i(y_i(t_k^y \pm \epsilon)) = y_{d_i}^{(r+1)} \quad \implies \quad y_i(t_k^y) = y_i^{(r)}.$$

Jede solche Änderung kann als mit Zeitinformation versehenes Meß-Ereignis

$$\langle t = t_k^y, y_i(t_k^y) = y_i^{(r)} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

(oder kürzer $\langle t_k^y, y_i^{(r)} \rangle$) interpretiert werden, das an den Regler weitergegeben wird. Umgekehrt kann aus der Anfangsinformation $y_d(0)$ und der Folge von Meß-Ereignissen (3.7) sofort auf den momentanen Wert des diskreten Signals $y_d(t)$ rückgeschlossen werden. Kennt man also $y_d(0)$, so sind zeitkontinuierliches quantisiertes Signal $y_d(t)$, $t \geq 0$, und die Folge von Ereignissen (3.7) äquivalent. Jedes dieser Ereignisse enthält offenbar ein Stück präziser Information über $y(t)$ und damit die Zustandsvariable $x(t)$.

Der Reglerausgang $u_d(t)$ – ein stückweise konstantes Signal mit endlichem (symbolischem) Wertebereich – kann ebenfalls als Folge von zeitbehafteten Ereignissen interpretiert werden: Wir bezeichnen die Zeitpunkte, zu denen sich das Signal ändert, mit t_k^u , $k = 1, 2, \dots$; das „neue“ Symbol sei $u_d^{(s)}$:

$$\lim_{(\epsilon > 0) \rightarrow 0} u_d(t_k^u - \epsilon) \neq u_d^{(s)} \quad \& \quad u_d(t_k^u) = u_d^{(s)}.$$

Dann läßt sich jedes Stellsignal durch die Ereignisse

$$\langle t = t_k^u, u_d(t_k^u) = u_d^{(s)} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

(oder kürzer $\langle t_k^u, u_d^{(s)} \rangle$) charakterisieren. Die Quantisierung von Reglerein- und -ausgang darf beliebig „grob“ sein – sie beinhaltet deswegen auch den Extremfall binärer Signale.

3.2.3 Der Regler

Im untersuchten Szenario spielt der Regler die Rolle eines (zunächst beliebigen) dynamischen Systems, das eine Folge von Stell-Ereignissen (3.8) als Antwort auf eine Sequenz von Meß-Ereignissen (3.7) generiert – einzige dem Regler auferlegte Einschränkung ist die Eigenschaft der *Kausalität*. Man beachte insbesondere, daß wir keine rein diskrete (Zustands-) Struktur des Reglers voraussetzen.

3.3 Steuerbarkeit und Erreichbarkeit

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, in welche Punkte des \mathbb{R}^n der kontinuierliche Streckenzustand x durch Wahl eines geeigneten Verlaufs des symbolischen Stellsignals in endlicher Zeit vom Ursprung aus gezwungen werden kann. Umgekehrt soll auch geklärt werden, von welchen Punkten des \mathbb{R}^n

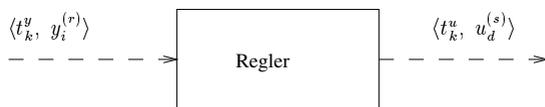


Bild 3.6: Regler.

es möglich ist, den Streckenzustand in den Ursprung zurückzuführen. Wir fragen also nach der *erreichbaren* bzw. der *steuerbaren Teilmenge* des Zustandsraums.

Da die Lösung dieses Problems sich als nicht ganz einfach entpuppt, führen wir es in zwei Schritten auf eine in der regelungstechnischen Literatur bereits behandelte Fragestellung zurück: Zunächst betrachten wir den Spezialfall, der sich ergibt, wenn die Dynamikmatrix a in (3.1) nicht von der Stellgröße u_d abhängt. Dieser Fall kann dann durch Anwendung des *Pontryagin*schen Maximumprinzips auf ein Problem mit kontinuierlichen aber beschränkten Stellvariablen abgebildet werden. Für dieses lassen sich durch Benutzung bekannter Resultate notwendige und hinreichende Bedingungen für Steuer- bzw. Erreichbarkeit des *gesamten* Zustandsraums angeben. Solche Bedingungen erweisen sich aber als überaus restriktiv. Falls sie nicht zutreffen, müssen wir deshalb fragen, welche *Teilmengen* des Zustandsraums durch Aufbringen eines geeigneten symbolischen Stellsignals erreichbar bzw. steuerbar sind. Im allgemeinen Fall (3.1) besitzt die Stellgröße eine ungleich stärkere Einflußmöglichkeit, da sie die Dynamik des Systems (die Matrix $a(u_d)$) verändern kann. Deswegen begnügen wir uns in diesem Fall damit, nach Bedingungen für Steuerbarkeit und Erreichbarkeit des *gesamten* Zustandsraums mittels symbolischer Stellsignale zu fragen. Erwartungsgemäß wird sich zeigen, daß das in Abschnitt 3.2.1 eingeführte Drei-Tank-Beispiel diesen Bedingungen genügt.

3.3.1 Ein Spezialfall

Hängt die Dynamikmatrix a nicht vom Stellsymbol u_d ab, so können wir (3.2) auch in folgender Form schreiben:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \tag{3.9}$$

u stellt ein stückweise konstantes, auf der Menge $\{u_1, \dots, u_N\} \subset \mathbb{R}^q$ „lebendes“ Signal dar; die Abbildung von U_d – der Menge der Stellsymbole – auf $\{u_1, \dots, u_N\}$ ist bijektiv. Diese Klasse diskreter reellwertiger Signale nennen wir *D-zulässig* und bezeichnen sie mit dem Symbol \mathcal{U}_d . Jedes D-zulässige Signal kann offenbar innerhalb eines endlichen Zeitintervalls als endliche Sequenz von Stell-Ereignissen (3.8) interpretiert werden. Es sei außerdem nochmals daran erinnert, daß die Matrix B „konstruktionsbedingt“ immer vollen Spaltenrang besitzt (vgl. Abschnitt 3.2.1).

Definition 3.1 (D-Steuerbarkeit und D-Erreichbarkeit) *Die Menge aller Zustände von (3.9), die mittels eines Signals aus \mathcal{U}_d in vorgegebener endlicher Zeit T in den Ursprung gesteuert bzw. vom Ursprung aus erreicht werden können, bezeichnet man mit \mathcal{C}_d^T bzw. \mathcal{R}_d^T .*

\mathcal{C}_d und \mathcal{R}_d sind die Mengen aller Zustände, die sich durch D-zulässige Stellsignale in beliebiger (endlicher) Zeit in den Ursprung steuern bzw. vom Ursprung aus erreichen lassen.

Jetzt betrachten wir eine (hypothetische) Klasse kontinuierlichwertiger (aber beschränkter) Stellsignale: Ein Signal u heißt *C-zulässig*, wenn es stückweise konstant ist und im Innern der konvexen Hülle H der Punkte $\{u_1, \dots, u_N\}$ „lebt“. H ist offensichtlich ein konvexes Polyeder im \mathbb{R}^q mit Dimension q . Die Klasse C-zulässiger Stellsignale bezeichnen wir mit \mathcal{U}_c .

Definition 3.2 (C-Steuerbarkeit und C-Erreichbarkeit) *Die Menge aller Zustände von (3.9), die mittels eines Signals aus \mathcal{U}_c in vorgegebener endlicher Zeit T in den Ursprung gesteuert bzw. vom Ursprung aus erreicht werden können, bezeichnet man mit \mathcal{C}_c^T bzw. \mathcal{R}_c^T .*

\mathcal{C}_c und \mathcal{R}_c sind die Mengen aller Zustände, die sich durch C-zulässige Stellsignale in beliebiger (endlicher) Zeit in den Ursprung steuern bzw. vom Ursprung aus erreichen lassen.

Mit Hilfe des *Pontryaginschen* Maximumprinzips kann man nun leicht den folgenden Sachverhalt beweisen:

Satz 3.1 *Die folgenden Bedingungen seien erfüllt (Bild 3.7):*

1. $0 \in \{u_1, \dots, u_N\}$ (i.e. $u(t) \equiv 0$ ist sowohl D- als auch C-zulässig),
2. 0 ist ein innerer Punkt von H

3. $\text{Rang} [Bw, ABw, \dots, A^{n-1}Bw] = n$ für alle w , die zu einer Kante von H parallel sind. Dies trifft „fast immer“ zu, wenn $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ vollen Zeilenrang hat und A zyklisch¹ ist [4].

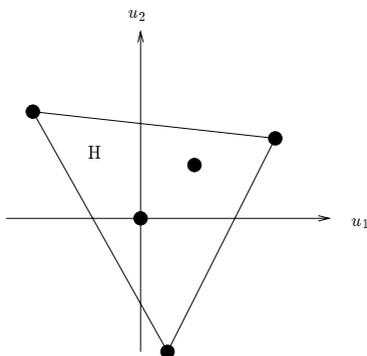


Bild 3.7: Illustration von Bedingung 1. bis 3.

Dann gilt:

$$x \in \mathcal{C}_c^T \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}_d^T \tag{3.10}$$

$$x \in \mathcal{R}_c^T \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}_d^T, \tag{3.11}$$

d.h. ein beliebiger Punkt im Zustandsraum kann genau dann in vorgegebener Zeit T mittels D -zulässiger Signale in den Ursprung gesteuert (vom Ursprung aus erreicht) werden, wenn dies auch mittels C -zulässiger Signale möglich ist.

Beweis: Wir bezeichnen die Restriktion von \mathcal{U}_d bzw. \mathcal{U}_c auf das Zeitintervall $[0, T]$ mit \mathcal{U}_d^T bzw. \mathcal{U}_c^T . Der (\Leftarrow) -Teil der Aussagen (3.10) und (3.11) ergibt sich direkt aus der Teilmengenbeziehung $\mathcal{U}_d^T \subset \mathcal{U}_c^T$. Die Gültigkeit des (\Rightarrow) -Teils in (3.10) folgt aus einer Anwendung des *Pontryaginschen* Maximumprinzips. Details findet man in [9] oder [10].

¹Eine reelle quadratische Matrix A heißt zyklisch, wenn die zugehörige Polynommatrix $sI - A$ nur ein von 1 verschiedenes invariantes Polynom besitzt.

Um \Rightarrow in (3.11) zu zeigen, definiert man die „Steuerbarkeitsoperatoren“

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_c^T &: \mathcal{U}_c^T \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{C}_d^T &: \mathcal{U}_d^T \rightarrow \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_c^T(u(t)) &:= - \int_0^T e^{-At} B u(t) dt \\ \mathbf{C}_d^T(u(t)) &:= - \int_0^T e^{-At} B u(t) dt.\end{aligned}$$

Das Bild von \mathcal{U}_c^T unter \mathbf{C}_c^T (bzw. von \mathcal{U}_d^T unter \mathbf{C}_d^T) besteht aus allen Zuständen, die in vorgegebener Zeit T mittels C- bzw. D-zulässiger Stellensignale in den Ursprung gezwungen werden können. Wegen (3.10) gilt

$$\mathbf{C}_c^T(\mathcal{U}_c^T) = \mathcal{C}_c^T = \mathcal{C}_d^T = \mathbf{C}_d^T(\mathcal{U}_d^T). \quad (3.12)$$

Ganz analog definieren wir „Erreichbarkeitsoperatoren“

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_c^T &: \mathcal{U}_c^T \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{R}_d^T &: \mathcal{U}_d^T \rightarrow \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_c^T(u(t)) &:= \int_0^T e^{A(T-t)} B u(t) dt \\ &= -e^{AT} \mathbf{C}_c^T(u(t))\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_d^T(u(t)) &:= \int_0^T e^{A(T-t)} B u(t) dt \\ &= -e^{AT} \mathbf{C}_d^T(u(t)).\end{aligned} \quad (3.14)$$

Offensichtlich geben $\mathbf{R}_c^T(\mathcal{U}_c^T)$ und $\mathbf{R}_d^T(\mathcal{U}_d^T)$ die Mengen aller Zustände an, die sich durch Anwendung C-zulässiger bzw. D-zulässiger Stellensignale vom Ursprung aus in Zeit T erreichen lassen. Aus (3.12) – (3.14) folgt sofort, daß $\mathbf{R}_c^T(\mathcal{U}_c^T)$ und $\mathbf{R}_d^T(\mathcal{U}_d^T)$ übereinstimmen; deshalb gilt:

$$\mathcal{R}_c^T = \mathbf{R}_c^T(\mathcal{U}_c^T) = \mathbf{R}_d^T(\mathcal{U}_d^T) = \mathcal{R}_d^T. \quad (3.15)$$

■

Auf der Basis dieses Satzes und der in [2, 15] veröffentlichten Resultate lassen sich darüber hinaus einfache notwendige und hinreichende Bedingungen für globale Erreichbarkeit und Steuerbarkeit mittels D-zulässiger Signale angeben:

Korollar 3.1 *Man betrachte Gl. (3.9). Die Annahmen in Satz 3.1 seien erfüllt. Dann gilt: $\mathcal{R}_d = \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn kein Eigenwert der Matrix A negativen Realteil besitzt; $\mathcal{C}_d = \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn kein Eigenwert von A positiven Realteil besitzt; $\mathcal{C}_d = \mathcal{R}_d = \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix A auf der imaginären Achse liegen.*

Anmerkung: Man beachte, daß die beiden letztgenannten Bedingungen keineswegs Stabilität implizieren: Nicht-triviale Jordan-Blöcke, d. h. mehrfache Eigenwerte der Matrix A auf der imaginären Achse und damit Instabilität des Streckenmodells (3.9) sind erlaubt.

Die Eigenwert-Bedingungen in Korollar 3.1 besitzen offensichtlich sehr restriktiven Charakter. Sind sie nicht erfüllt, so möchte man zumindest wissen, welche *Teilmenge* des Zustandsraums durch Anwendung D-zulässiger Stell-signale (d.h. Sequenzen von Stell-Ereignissen (3.8)) in den Ursprung gesteuert bzw. vom Ursprung erreicht werden können. Zur Beantwortung dieser Frage kann man auf bekannte Ergebnisse der klassischen Regelungstheorie zurückgreifen: Wie man eine zeitdiskrete Version von \mathcal{R}_c^T findet, wird beispielsweise in [6] und [7] diskutiert. Die dort veröffentlichten Resultate kann man dazu benutzen, \mathcal{R}_c^T und – wegen (3.14), (3.15) – auch \mathcal{R}_d^T und \mathcal{C}_d^T zu approximieren. Auf besonders einfache Weise kann man die maximalen *Unterräume* des \mathbb{R}^n bestimmen, die in \mathcal{R}_d und \mathcal{C}_d enthalten sind: Man setzt wiederum voraus, daß Annahmen 1. bis 3. gelten; $E_s(A)$, $E_u(A)$, und $E_c(A)$ bezeichnen den stabilen, instabilen und zentralen Unterraum von $\dot{x} = Ax$, d.h. $E_s(A)$, $E_u(A)$ und $E_c(A)$ werden durch Real- und Imaginäranteile aller verallgemeinerter Eigenvektoren der Matrix A aufgespannt, die zu Eigenwerten mit negativen, positiven bzw. verschwindenden Realteilen gehören. Dann erhält man $\tilde{\mathcal{R}}_d$ – den maximalen in \mathcal{R}_d enthaltenen Unterraum – und $\tilde{\mathcal{C}}_d$ – den maximalen in \mathcal{C}_d enthaltenen Unterraum – via

$$\tilde{\mathcal{R}}_d = \text{Spann} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \cap (E_c(A) + E_u(A)) \ , \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_d = \text{Spann} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \cap (E_c(A) + E_s(A)) \ . \quad (3.17)$$

(Spann Γ steht für den durch die Spalten der Matrix Γ aufgespannten Raum.)

Auf der Grundlage dieser Ergebnisse lassen sich auch einige hinreichende Bedingungen für den durch Gl. (3.1) beschriebenen allgemeinen Fall angeben:

3.3.2 Der allgemeine Fall

Wir betrachten Gl. (3.1) und nehmen an, es existiere eine Teilmenge U_{d_i} von Stellsymbolen, so daß die zugehörigen Matrizen A_i , B_i und die assoziierte Menge von diskreten, reellwertigen Eingangsvektoren $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_{N_i}}\}$ den in Satz 3.1 aufgeführten Bedingungen 1.-3. genügen. Dasselbe gelte für die der Teilmenge U_{d_j} zugeordneten Größen A_j , B_j und $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_{N_j}}\}$. Dann ist der gesamte Zustandsraum \mathbb{R}^n mittels D-zulässiger Signale sowohl in den Ursprung steuerbar als auch vom Ursprung aus erreichbar, wenn alle Eigenwerte von A_i auf oder links der imaginären Achse liegen (globale Steuerbarkeit) und kein Eigenwert von A_j negativen Realteil besitzt (globale Erreichbarkeit).

Ein zweites einfaches Resultat lautet folgendermaßen:

Satz 3.2 *Man betrachte wiederum zwei Teilmengen U_{d_i} und U_{d_j} von U_d . Annahme 1. und 2. aus Satz 3.1 mögen sowohl für A_i , B_i , $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_{N_i}}\}$ als auch für A_j , B_j , $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_{N_j}}\}$ erfüllt sein. $\tilde{\mathcal{R}}_d(i)$ bzw. $\tilde{\mathcal{R}}_d(j)$ sei der maximale erreichbare Unterraum des \mathbb{R}^n , wenn u_d auf U_{d_i} bzw. U_{d_j} beschränkt wird. Dann ist $\tilde{\mathcal{R}}_d(i) + \tilde{\mathcal{R}}_d(j)$ mit $u_d \in U_{d_i} \cup U_{d_j}$ erreichbar, wenn $\tilde{\mathcal{R}}_d(i) - (\tilde{\mathcal{R}}_d(i) \cap \tilde{\mathcal{R}}_d(j))$ A_j -invariant ist.*

Beweis: $\tilde{x} = \tilde{x}_i + \tilde{x}_j$ sei ein beliebiges Element aus $\tilde{\mathcal{R}}_d(i) + \tilde{\mathcal{R}}_d(j)$, wobei $\tilde{x}_i \in \tilde{\mathcal{R}}_d(i) - (\tilde{\mathcal{R}}_d(i) \cap \tilde{\mathcal{R}}_d(j))$ und $\tilde{x}_j \in \tilde{\mathcal{R}}_d(j)$. Um den Zustand aus dem Ursprung nach \tilde{x} zu zwingen, beschränkt man u_d zuerst auf U_{d_i} – dann kann der Zustand in endlicher Zeit (z.B. T_i) in jeden Punkt in $\tilde{\mathcal{R}}_d(i)$ und damit in $\tilde{\mathcal{R}}_d(i) - (\tilde{\mathcal{R}}_d(i) \cap \tilde{\mathcal{R}}_d(j))$ gesteuert werden. Wir nennen diesen Punkt \tilde{x}_i und beschränken u_d nun auf U_{d_j} . Dann kann der Zustand – wiederum in endlicher Zeit ($T_j - T_i$) nach

$$x(T_j) = e^{A_j(T_j - T_i)} \tilde{x}_i + \tilde{x}_j,$$

gezwungen werden, wobei \tilde{x}_j jedes gewünschte Element aus $\tilde{\mathcal{R}}_d(j)$ sein kann. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{x}_i \in \tilde{\mathcal{R}}_d(i) - (\tilde{\mathcal{R}}_d(i) \cap \tilde{\mathcal{R}}_d(j))$ so gewählt werden kann, daß $\tilde{x}_i = e^{A_j(T_j - T_i)} \tilde{x}_i$ tatsächlich den

gewünschten Punkt in $\tilde{\mathcal{R}}_d(i) - (\tilde{\mathcal{R}}_d(i) \cap \tilde{\mathcal{R}}_d(j))$ darstellt. Dies liegt aber auf der Hand, weil $\tilde{\mathcal{R}}_d(i) - (\tilde{\mathcal{R}}_d(i) \cap \tilde{\mathcal{R}}_d(j))$ voraussetzungsgemäß A_j - und deshalb $e^{A_j(T_j - T_i)}$ - und $e^{-A_j(T_j - T_i)}$ -invariant ist. ■

Beispiel: Zur Illustration dieser Ergebnisse greifen wir auf das in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Beispiel zurück: Die Bedingung für globale Steuerbarkeit ist für $i = 1$ erfüllt. Der Zustand kann deshalb in endlicher Zeit von einer beliebigen Anfangsbedingung mit $u_d \in U_{d_1} = \{u_d^{(1)}, \dots, u_d^{(5)}\}$ (d.h. Ventil 1 und 2 dauernd geöffnet) in den Ursprung gezwungen werden.

Globale Erreichbarkeit kann allerdings nicht garantiert werden, wenn das Stellsymbol auf eine der Teilmengen U_{d_1}, \dots, U_{d_4} beschränkt wird: für jedes $i \in \{1, \dots, 4\}$ ist $\tilde{\mathcal{R}}_d(i)$ ein ein- oder zweidimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^3 : Wählt man die Systemparameter beispielsweise zu $\bar{a} = 3$, $\bar{b} = 2$, $r = 1$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_d(1) &= \text{Spann} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_d(2) &= \text{Spann} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_d(3) &= \text{Spann} \left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_d(4) &= \text{Spann} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Mit $u_d \in U_{d_1} \cup U_{d_4}$ läßt sich demgegenüber der gesamte Zustandsraum vom Ursprung aus erreichen: $\tilde{\mathcal{R}}_d(1) - (\tilde{\mathcal{R}}_d(1) \cap \tilde{\mathcal{R}}_d(4))$ ist (trivialerweise) A_4 -invariant ($A_4 = 0$); deswegen ist $\tilde{\mathcal{R}}_d(1) + \tilde{\mathcal{R}}_d(4) = \mathbb{R}^3$ erreichbar. Dieses Ergebnis leuchtet unmittelbar ein: Mit $i = 1$ (i.e. sowohl Ventil 1 als auch Ventil 2 sind geöffnet) kann der Streckenzustand solange in Richtung $[1 \ 1 \ 1]'$ vom Ursprung weg verschoben werden, bis man in Tank B einen

gewünschten Flüssigkeitspegel erhält. Dann schaltet man auf $i = 4$ um (d.h. man schließt beide Ventile und koppelt Tank B somit von äußeren Einwirkungen ab) und verschiebt den Zustand an einen beliebigen Punkt auf der Ebene $x_2 = \text{const}$. Dieser Eingriff läßt sich leicht durchführen, da für $i = 4$ die Wasserstände in Tank A und C getrennt beeinflußt werden können.

3.4 Beobachtbarkeit

In Anlehnung an regelungstechnische Standard-Terminologie sagen wir, daß ein D-zulässiges Stellsignal (d.h. eine vorgegebene Folge von zeitbehafteten Stell-Ereignissen $\langle t_k^u, u_d^{(s)} \rangle$, $k = 1, 2, \dots$) zwischen zwei Anfangszuständen $x(0)$ und $\tilde{x}(0)$ *unterscheidet*, wenn es für beide Anfangsbedingungen verschiedene Folgen von zeitbehafteten Meß-Ereignissen erzeugt. $x(0)$ und $\tilde{x}(0)$ nennen wir *unterscheidbar*, wenn mindestens eine Folge $\langle t_k^u, u_d^{(s)} \rangle$, $k = 1, 2, \dots$, existiert, die zwischen ihnen unterscheidet. Schließlich bezeichnen wir das aus Streckenmodell (3.1), (3.4) und Quantisierer (3.5)-(3.6) bestehende System als auf der Menge \mathcal{O}_d *beobachtbar*, wenn jedes Paar von Anfangszuständen in \mathcal{O}_d unterscheidbar ist.

Man beachte, daß wegen der vorgenommenen Quantisierung des Meßsignals Beobachtbarkeit und Steuerbarkeits- bzw. Erreichbarkeitseigenschaften miteinander verknüpft sind. Man kann sich z.B. vorstellen, daß ohne eine geeignete Sequenz von Stell-Ereignissen der Systemzustand im Innern eines Quantisierungsgebiets verharrt; eine Unterscheidung von Zuständen dieses Quantisierungsgebiets wäre dann offenbar nicht möglich. Um ein neues Meß-Ereignis $\langle t_k^y, y_i^{(r)} \rangle$ zu erzeugen, muß der Systemzustand über die die Quantisierungsgebiete trennende Hyperebene $c_i x = y_i^{(r)}$ im \mathbb{R}^n gezwungen werden.

Satz 3.3 *T sei eine beliebige positive reelle Zahl, \mathcal{C}_d^T und \mathcal{R}_d^T die Mengen von Punkten im \mathbb{R}^n , die sich in Zeit T in den Ursprung steuern bzw. vom Ursprung aus erreichen lassen. Mit $\mathcal{C}_d^T(i)$ und $\mathcal{R}_d^T(i)$ bezeichne man die steuerbaren und erreichbaren Teilmengen, wenn das Stellsymbol auf U_d beschränkt wird. c_m sei die m -te Zeile der Matrix C_y in (3.4). Das aus Streckenmodell (3.1), (3.4) und der in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Quantisierung bestehende hybride System ist auf der Menge \mathcal{C}_d^T beobachtbar, wenn für mindestens ein $i \in \{1, \dots, P\}$ und ein $m \in \{1, \dots, p\}$ gilt:*

1. Es gibt ein $r \in \{1, \dots, M_m - 1\}$ so daß $c_m x = y_m^{(r)}$ die Menge $\mathcal{C}_d^T(i) \cap \mathcal{R}_d^T(i)$ schneidet.

2.

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} c_m \\ c_m A_i \\ \vdots \\ c_m A_i^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Beweis: Man nehme zunächst an, daß eine Sequenz von Stell-Ereignissen existiert, die n Meß-Ereignisse $\langle t_k^y, y_m^{(r)} \rangle$, $k = 1, \dots, n$ verursacht. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} y_m^{(r)} \\ \vdots \\ y_m^{(r)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_m e^{A_i t_1^y} \\ \vdots \\ c_m e^{A_i t_n^y} \end{bmatrix}}_{:= O_{i,m}} x(0) + \kappa(u_i(t)),$$

und $\kappa(u_i(t))$ steht für eine bekannte Größe. Eine *eindeutige* Lösung für die Anfangsbedingung $x(0)$ existiert genau dann, wenn die $n \times n$ -Matrix $O_{i,m}$ Rang n besitzt. Eine notwendige (und hinreichende) Bedingung für Singularität von $O_{i,m}$ ist die Existenz einer nichttrivialen Lösung der homogenen Gleichung

$$0 = O_{i,m} x(0). \quad (3.18)$$

Dies bedeutet, daß wir das System (3.1), (3.4) ohne Anregung in einer nicht verschwindenden Anfangsbedingung starten können und für n verschiedene Zeitpunkte t_1^y, \dots, t_n^y messen: $y_m(t) = c_m x(t) = 0$. Wegen der Rangbedingung in Satz 3.3 kann man die Möglichkeit $y_m(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$ ausschließen. (3.18) kann also nur dadurch zustande kommen, daß die „Ereignis-Zeitpunkte“ t_k^y „pathologisch“ sind – sie müßten mit den Zeitpunkten übereinstimmen, zu denen die m -te Komponente der autonomen Lösung von (3.1), (3.4) die Zeitachse schneidet. Diese Punkte bilden offenbar eine Teilmenge von \mathbb{R}^+ mit Maß 0.

Jetzt muß noch gezeigt werden, daß ein Stellsignal existiert, das Meß-Ereignisse in einem „nicht-pathologischen“ Zeitraster erzeugt.

Dies trifft tatsächlich für alle Anfangsbedingungen in \mathcal{C}_d^T zu: Die Hyperebene $c_m x = y_m^{(r)}$, deren Überschreiten ein Meß-Ereignis auslöst, schneidet $\mathcal{C}_d^T(i) \cap \mathcal{R}_d^T(i)$ (und folglich \mathcal{C}_d^T). Deshalb existiert sicherlich eine Sequenz von Stell-Ereignissen, die den Anfangszustand $x_0 \in \mathcal{C}_d^T$ in jeder beliebigen Zeit $t_a \geq 2T$ auf diese Hyperebene zwingt – beispielsweise indem der Zustand zuerst in den Ursprung gesteuert wird (vgl. Bild 3.8). Diesen Vorgang kann man wiederholen, um weitere Meß-Ereignisse zu beliebigen Zeiten t_b, t_c, \dots zu erzeugen ($t_b - t_a \geq 2T, t_c - t_b \geq 2T, \dots$). ■

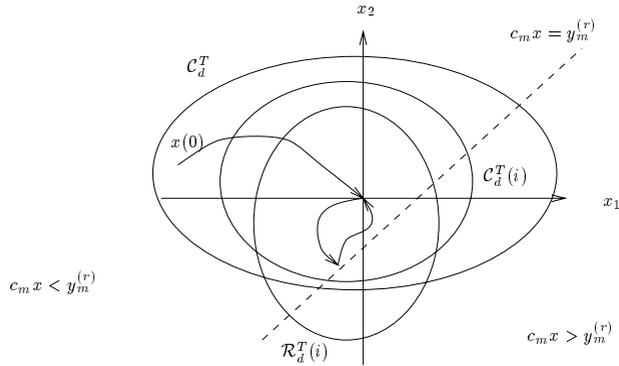


Bild 3.8: Beispiel zur Erzeugung „nicht-pathologisch“ angeordneter Meß-Ereignisse.

Anmerkung: Jedes zufällig ausgewählte symbolische Stell-signal, das zu einem n -maligen Überschreiten einer „Ereigniserzeugenden“ Hyperebene führt, bewerkstelligt dies mit Wahrscheinlichkeit 1 auf „nicht-pathologische“ Weise; es ermöglicht also (ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit 1) ein Rekonstruieren des Anfangszustands x_0 .

Anmerkung: Die „pathologischen“ Abstände zwischen den Meß-Ereignissen hängen i.a. von allen Eigenwerten der Matrix

A_i ab. Bei asymptotisch stabilem A_i und $t \rightarrow \infty$ nähern sie sich den Inversen der bekannten pathologischen Abtastfrequenzen $(\lambda - \mu)/(2l\pi j)$, $l = \pm 1, \pm 2, \dots$ (λ und μ bezeichnen beliebige Eigenwerte von A_i).

Falls mehrere Hyperebenen $c_m x = y_m^{(r)}$ die Menge $\mathcal{C}_d^T(i) \cap \mathcal{R}_d^T(i)$ schneiden, kann die Rangbedingung in Satz 3.3 offensichtlich entschärft werden. Falls dies gar auf alle p Hyperebenen $c_m x = y_m^{(r)}$, $m = 1, \dots, n$, zutrifft, vereinfacht sich die Rangbedingung auf

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Die Bedingungen in Satz 3.3 lassen sich leicht überprüfen. Man beachte aber, daß der hier verwendete Beobachtbarkeitsbegriff nur die *Existenz* von symbolischen Stellsignalen garantiert, die eine Rekonstruktion des Anfangszustands erlauben. *Ob* man einen solchen Stelleingriff auch tatsächlich finden kann, hängt vom betrachteten System ab. Im folgenden Beispiel erweist sich dies jedoch als problemlos möglich.

Beispiel: Wir wenden uns wieder dem in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Drei-Tank-System zu. Die Quantisierung liefere folgende Information:

$$y_d(t) = \begin{cases} \text{„Wasserstand in Tank A hoch“} \\ \text{wenn } y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t) > 1.5 \\ \text{„Wasserstand in Tank A niedrig“} \\ \text{wenn } y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t) \leq 1.5 . \end{cases}$$

Es läßt sich leicht überprüfen, daß die in Satz 3.3 aufgeführten (hinreichenden) Beobachtbarkeitsbedingungen zutreffen: Wir beschränken das Stellsignal auf U_{d_1} , d.h. wir „wählen“ (A_1, B_1) als Systemparameter. Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß $\mathcal{C}_d(1) = \mathbb{R}^n$ (und deshalb $\mathcal{C}_d = \mathbb{R}^n$); darüberhinaus – auch darauf wurde im vorangehenden Abschnitt hingewiesen – enthält $\mathcal{R}_d(1)$ den Unterraum $\text{Spann} \{ [1 \ 1 \ 1]'\}$. Die „Ereignis-erzeugende“

Hyperbene $x_1 = 1.5$ schneidet deshalb $\mathcal{R}_d(1) \cap \mathcal{C}_d(1)$ und – für genügend große T – $\mathcal{R}_d^T(1) \cap \mathcal{C}_d^T(1)$: Bedingung 1 ist demzufolge erfüllt. Dies gilt auch für Bedingung 2, da

$$\begin{bmatrix} C \\ CA_1 \\ CA_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{a} & \bar{a} & 0 \\ \bar{a}^2 & (-2\bar{a}^2 - \bar{a}\bar{b}) & \bar{a}\bar{b} \end{bmatrix}$$

für nicht-verschwindende Parameter \bar{a} und \bar{b} Rang 3 besitzt. Die Existenz einer Sequenz von Stell-Ereignissen, die die Rekonstruktion des Streckenzustands erlaubt, ist also gesichert. In diesem Beispiel erweist sich auch die eigentliche Bestimmung eines geeigneten Stellsignals als trivial.

3.5 „Stabilität“ und Regelung

Asymptotische Stabilität des betrachteten hybriden Regelkreises im *Lyapunov*-schen Sinne² läßt sich nur in Sonderfällen erreichen. Hierzu zählen die folgenden Szenarien:

1. Mindestens ein Stellsymbol $u_d^{(k)} \in U_d$ ist einer asymptotisch stabilen Dynamikmatrix A_i zugeordnet.
2. Die angestrebte Ruhelage liegt auf einer (oder mehreren) „Ereignis-auslösenden“ Hyperbene(n) im \mathbb{R}^n , und die Systemtrajektorie kann auf diesem Unterraum in die gewünschte Ruhelage gezwungen werden („chattering control“).

Als Gegenbeispiel stelle man sich folgendes Problem vor: Die Dynamikmatrix hänge nicht von der Stellgröße ab – $a(u_d^{(k)}) = A = \text{const.} \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$ – und mindestens ein Eigenwert der Matrix A liege rechts der imaginären Achse. Der Ursprung sei die gewünschte Ruhelage, und $y = C_y x = 0$ liege im Innern einer Quantisierungsgebiets. Befindet sich nun $C_y x(0)$ ebenfalls innerhalb dieses Gebiets und gehört $x(0)$ nicht zum stabilen invarianten Unterraum von A , so wird der Zustand sich zunächst „ohne Wissen“ des

²Eine Ruhelage x_e heißt stabil im Sinne *Lyapunov*s, wenn für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $t_0 \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ existiert, so daß aus $\|x(t_0) - x_e\| < \delta(\epsilon, t_0)$ folgt: $\|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$. Sie heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und wenn für jedes $t_0 \in \mathbb{R}^+$ ein $\eta(t_0) > 0$ existiert, so daß aus $\|x(t_0) - x_e\| < \eta(t_0)$ folgt, daß $\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Reglers vom Ursprung wegbewegen. Erst beim Übergang in ein anderes Quantisierungsgebiet wird ein Meß-Ereignis ausgelöst und der Regler informiert.

Stabilität im *Lyapunov*schen Sinne muß also i.a. durch ein schwächeres Ziel ersetzt werden. Es bietet sich an, beim Entwurf auf eine möglichst kleine, die gewünschte Ruhelage als inneren Punkt enthaltende, global attraktive Menge hinzuwirken: ζ sei der Zustand, X die Zustandsmenge des hybriden Regelkreises, $d: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine auf X definierte Metrik. Eine Menge $\Gamma \subset X$ wird als *global attraktiv* bezeichnet, wenn gilt:

1. Γ ist (für das betrachtete System) invariant, d.h. Systemtrajektorien können der Menge Γ nicht entkommen:

$$\zeta(t) \in \Gamma \Rightarrow \zeta(\tau) \in \Gamma \text{ für alle } \tau \geq t.$$

2. Jede Systemtrajektorie dringt „irgendwann“ in die Menge Γ ein:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\zeta(t), \Gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{\zeta} \in \Gamma} d(\zeta, \tilde{\zeta}) = 0.$$

3.5.1 Ein einfacher prädiktiver Regler

Im Rahmen des in diesem Kapitels dargestellten Ansatzes drängt sich eine zustandsbasierte Regelstrategie auf: Der Regler versucht, den *kontinuierlichen* Streckenzustand aus Meß-Ereignissen zu rekonstruieren und ihn dann unter Minimierung eines geeigneten Kostenfunctionals in die gewünschte Ruhelage zu zwingen. Obwohl der Regler nur (zeitbehaftete) diskrete Ereignisse wahrnimmt und (zeitbehaftete) diskrete Ereignisse generiert, benötigt er zum Zwecke der Zustandsrekonstruktion und der Trajektorienplanung ein *kontinuierliches* Modell der Strecke (Gln. (3.1), (3.3) - (3.4)).

Eine solche Vorgehensweise führt i.a. auf ein *duales Regelungsproblem* – langfristiger Nutzen von „anregenden“ (d.h. Information in Form von Meß-Ereignissen erzeugenden) Stelleingriffen und deren kurzfristige negative Auswirkung auf das Gütekriterium müssen gegeneinander abgewogen werden. Hierfür kann man eine zweistufige Strategie verwenden:

1. Liegen weniger als n Meß-Ereignisse vor, so versucht der Regler zusätzliche Meß-Ereignisse zu erzwingen (reine Anregung der Strecke).

2. Nach Auftreten von n Meß-Ereignissen wird auf eine reine *Certainty Equivalence* Strategie umgeschaltet: Der Regler verhält sich, als ob die nun zur Verfügung stehende Schätzung des Streckenzustands exakt sei (was nur im (hypothetischen) Falle der totalen Abwesenheit von Modellfehlern und Störungen zutrifft) und berechnet unter dieser Annahme durch Optimierung einer Kostenfunktion eine Sequenz von zukünftigen Stell-Ereignissen; in dieser Phase ist der Regler also nicht mehr an der Erzeugung von Meß-Ereignissen interessiert – sie treten bei der Ausführung der berechneten Steuerstrategie als „zufällige“ Nebenprodukte auf. Diese zusätzliche Information wird dann in „rollierender“ Form verarbeitet: $\langle t_k^y, y_i^{(r)} \rangle$, $k > n$, wird zur Revision von momentaner Zustandsschätzung und darauf basierender zukünftiger Stell-Ereignisse verwendet. Es ergibt sich also eine prädiktive (oder „receding horizon“) Regelstrategie.

Die Zustandsvariable eines solchen Reglers „lebt“ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \times \{P, CE\}$; ihre Projektion auf den \mathbb{R}^n ist die reglerinterne Schätzung des Streckenzustands; die Projektion auf die binäre Menge $\{P, CE\}$ gibt an, ob der Regler sich im „Anregungs-Mode“ („Probing“ – P) oder im „Certainty-Equivalence-Mode“ (CE) befindet; die Projektion des Reglerzustands auf \mathbb{N} gibt schließlich die Anzahl der zur Verfügung stehenden Meß-Ereignisse an.

3.6 Ein sehr einfaches Beispiel

Ein weiteres einfaches Beispiel soll das in Abschnitt 3.2.1 dargestellten Drei-Tank-System ergänzen: Die bisher eingeführten Konzepte lassen sich anhand des nachfolgend beschriebenen Gedankenexperiments – gerade wegen seiner extremen Einfachheit – leichter veranschaulichen als mittels realitätsnäherer Beispiele.

Beispiel: Ein Wagen der Masse 1 bewege sich reibungsfrei auf der Ebene (Bild 3.9). Als Zustände definieren wir Position (x_1) und Geschwindigkeit (x_2). Ein (idealisiertes) Streckenmodell lautet dann:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A x + g(u_d).$$

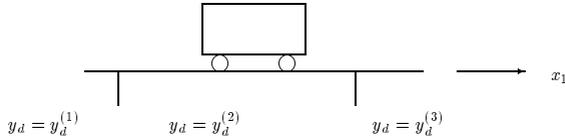


Bild 3.9: Gedankenexperiment: Wagen auf einer Ebene.

Der Anregungsterm hängt vom Stellsignal u_d ab; dieses kann drei verschiedene Werte annehmen:

$$\begin{aligned}
 U_d = \{ u_d^{(1)} &= \text{„konstante Kraft nach rechts aufbringen“}, \\
 u_d^{(2)} &= \text{„keine Kraft aufbringen“}, \\
 u_d^{(3)} &= \text{„konstante Kraft nach links aufbringen“} \};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(u_d^{(1)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 g(u_d^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 g(u_d^{(3)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich sind alle Anregungsterme linear abhängig – wir können also schreiben

$$\begin{aligned}
 [g(u_d^{(1)}) \ g(u_d^{(2)}) \ g(u_d^{(3)})] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1] \\
 &:= B[u_1 \ u_2 \ u_3].
 \end{aligned}$$

Weiterhin nehmen wir an, daß Geschwindigkeit nicht, Position nur in grober Quantisierung gemessen werden kann:

$$y_d(t) = Q(\underbrace{[1 \ 0]}_{y(t)} x(t)) = \begin{cases} y_d^{(1)} & \text{wenn } y(t) \leq y^{(1)}, \\
 y_d^{(2)} & \text{wenn } y^{(1)} < y(t) \leq y^{(2)}, \\
 y_d^{(3)} & \text{wenn } y(t) > y^{(2)}; \end{cases}$$

$y^{(1)} < 0$ und $y^{(2)} > 0$ seien vorgegebene Schwellenwerte. Es liegt also ein kontinuierliches System (Zustandsraum \mathbb{R}^2) mit symbolischen Stell- und Meßgrößen vor.

Aus Korollar 3.1 folgt

$$\mathcal{R}_d = \mathcal{C}_d = \mathbb{R}^2,$$

d.h. der gesamte Zustandsraum ist mittels D-zulässiger Eingriffe (i.e. durch Anwenden einer endlichen Folge von Stell-Ereignissen) steuerbar und erreichbar. Dies läßt sich auch leicht der oberen Hälfte von Bild 3.10 entnehmen – sie zeigt die Zustandstrajektorien des Streckenmodells für die drei möglichen Stellsymbole: Für $u_d = u_d^{(1)}$ in durchgezogener, für $u_d = u_d^{(2)}$ in punktierter und für $u_d = u_d^{(3)}$ in unterbrochener Form. Für $u_d = u_d^{(2)}$ sind alle Punkte auf der x_1 -Achse stationär.

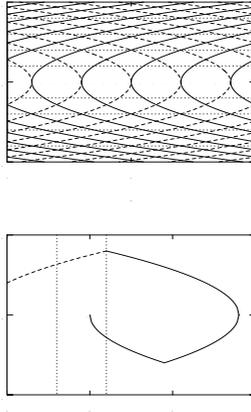


Bild 3.10: Alle möglichen Zustandstrajektorien der unregelmäßigen Strecke (oben), Zustandstrajektorie der geregelten Strecke (unten).

Satz 3.3 kann man entnehmen, daß unser Beispielsystem im gesamten \mathbb{R}^2 beobachtbar ist.

Wollen wir den Streckenzustand in den Ursprung zwingen, so können wir die in der unteren Hälfte von Bild 3.10 gezeigte Strategie anwenden (dort wird $y^{(1)} = -2$ und $y^{(2)} = 1$ angenommen; Meß-Ereignisse werden durch ein „x“, Stell-Ereignisse durch „o“ gekennzeichnet): Man benutze die Anfangsinformation $y_d(0)$ (i.e. das Wissen, daß sich der Streckenzustand zum Zeitpunkt $t = 0$ im linken, mittleren oder rechten Quantisierungsgebiet befindet), um Stell-Ereignisse zu generieren, die zwei Meß-Ereignisse bewirken: Für $y_d(0) = y_d^{(1)}$ wählen wir $\langle t_1^u = 0, u_d^{(1)} \rangle$. Hierdurch erhalten wir zwei Meß-Ereignisse $\langle t_1^y, y(t_1^y) = y^{(1)} \rangle$ – der Zustand bewegt sich in das mittlere Quantisierungsgebiet hinein – und $\langle t_2^y, y(t_2^y) = y^{(2)} \rangle$ – der Zustand verläßt das mittlere Quantisierungsgebiet. Nun rekonstruiert man den gegenwärtigen Zustand und zwingt ihn in den Ursprung – z.B. in der in Bild 3.10 gezeigten zeitoptimalen Weise, indem man die Sequenz von Stell-Ereignissen $\langle t_2^u = t_2^y, u_d^{(3)} \rangle$ und $\langle t_3^u, u_d^{(1)} \rangle$ anwendet; dann setzt man $u(t)$ zu Null: $\langle t_4^u, u_d^{(2)} \rangle$. Die Zeitpunkte t_3^u und t_4^u können aus dem rekonstruierten Zustandsvektor $x(t_2^y)$ berechnet werden.

Wenn wir der in Abschnitt 3.5 skizzierten Strategie folgen würden, müßten wir die Zustandsschätzung (und damit auch die zukünftige Steuerstrategie) aktualisieren, wenn die Zustandstrajektorie wieder in das mittlere Quantisierungsgebiet eintritt und hierdurch ein neues Meß-Ereignis auslöst. Da wir in unserem Gedankenexperiment aber das völlige Fehlen von Modellunsicherheit und unbekanntem Störungen voraussetzen, besteht hierzu kein Anlaß – der Streckenzustand ist für alle $t \geq t_2^y$ *exakt* bekannt.

Bei Verwendung realistischerer Modellannahmen müßten wir auch berücksichtigen, daß wir uns nach Nullsetzen des Streckeneingangs $u(t)$ nicht *genau* im Ursprung (oder einem anderen Punkt der x_1 -Achse) befinden: Die instabile Systemdynamik wird den Zustand dann von der gewünschten Ruhelage (dem Ursprung) wegtreiben. Dies bleibt dem Regler solange verborgen, bis $y(t) = y^{(1)}$ oder $y(t) = y^{(2)}$ (d.h. bis ein neues Meß-Ereignis erzeugt wird). Erst dann kann die Zustandsschätzung aktualisiert und

dieselbe Strategie erneut angewandt werden.

3.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein auf der „klassischen“ kontinuierlichen Systemtheorie basierender Ansatz zur Analyse und Synthese hybrider Regelkreise untersucht. Dieser Ansatz empfiehlt sich, wenn der hybride Charakter durch diskretwertige Stell- oder Meßvariablen erzwungen wird, die eigentlichen Zielsetzungen (Spezifikationen) aber kontinuierlicher Natur sind. Man gelangt in diesem Fall zu der Aufgabe, ein Streckenmodell mit kontinuierlichem Zustandsvektor durch Rückführung symbolischer Meßinformation auf diskrete Stellgrößen zu regeln. Auf dem Weg zu einer Lösung muß man sich mit den Auswirkungen von diskretwertigen Stelleingriffen auf kontinuierliche Systemgrößen beschäftigen und untersuchen, ob sich der kontinuierliche Zustandsvektor aus symbolischer Meßinformation rekonstruieren läßt – man muß sich mit den Fragen nach der Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und der Beobachtbarkeit auseinandersetzen. Können diese Fragen positiv beantwortet werden, läßt sich ein einfacher modellprädiktiver Regler entwerfen. Nach einer reinen Anregungsphase, während der er lediglich daran interessiert ist, den Streckenzustand zu „lernen“, schaltet er auf eine Certainty Equivalence Strategie um – er nimmt die momentan verfügbare Zustandsschätzung für bare Münze und plant auf dieser Grundlage seine zukünftigen Stelleingriffe. Fallen während der Umsetzung dieses Eingriffs neue Meß-Ereignisse an, so werden diese zu einer Aktualisierung der Zustandsschätzung und einer Revision des zukünftigen Stellsignals benutzt.

3.8 Literaturhinweise

Eine ausführliche Version des Beweises von Satz 3.1 findet sich in [9] und [10]. Das hierbei verwendete *Pontryaginsche* Maximumprinzip wird in [1] anschaulich beschrieben. Der in Satz 3.1 gebrauchte Begriff der „Zyklizität“ einer Matrix tritt in der linearen Mehrgrößen-Regelungstheorie häufig in Erscheinung. Eine ausführliche Erklärung findet sich beispielsweise in [4]. Korollar 3.1 basiert auf einigen in [2] und [15] veröffentlichten Ergebnissen zur Steuerbarkeit linearer Systeme mittels kontinuierlicher (aber beschränkter) Stellgrößen. Die in Abschnitt 3.4 benutzte Terminologie („Unterscheidbar-

keit“, „Beobachtbarkeit“) entstammt [16]. Der Begriff einer global attraktiven Menge findet sich in [3] – einem Standardwerk der Stabilitätstheorie. Modellprädiktive (oder „Receding Horizon“) Regelstrategien werden in einer Vielzahl von Aufsätzen diskutiert. Beispiele sind [5] und [8].

- [1] *Boltyanski, V.: Mathematical Methods of Optimal Control.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.
- [2] *Brammer, R. F.: Controllability in linear autonomous systems with positive controllers.* SIAM J. Control, 10:339–353, 1972.
- [3] *Hahn, W.: Stability of Motion.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [4] *Kailath, T.: Linear Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- [5] *Keerthi, S. S. und Gilbert, E. G.: Moving-horizon approximations for a general class of optimal nonlinear infinite-horizon discrete-time systems.* In Proc. 20th Annual Conf. Inform. Sci. Syst., S. 301–306, 1986.
- [6] *Lasserre, J. B.: Reachable, controllable sets and stabilizing control of constrained linear systems.* Automatica, 29:531–536, 1993.
- [7] *Lin, J. N.: Determination of reachable set for a linear discrete system.* IEEE Transactions on Automatic Control, 15:339–342, 1970.
- [8] *Mayne, D. Q. und Michalska, H.: Receding horizon control of nonlinear systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, 35:814–824, 1990.
- [9] *Raisch, J.: Simple hybrid control systems – continuous FDLTI plants with quantized control inputs and measurements.* Systems Control Group Report 9305, Dept. of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, Mai 1993.
- [10] *Raisch, J.: Controllability and observability of simple hybrid control systems – continuous FDLTI plants with symbolic measurements and quantized control inputs.* In Proc. 4th International Conference on CONTROL'94, S. 595–600, Warwick, UK, 1994. IEE.

- [11] *Raisch, J.*: Simple hybrid control systems – continuous FDLTI plants with symbolic measurements and quantized control inputs. In: *Cohen, G. und Quadrat, J.-P. (Hrsg.): 11th International Conference on Analysis and Optimization of Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences 199*, S. 369–376. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [12] *Raisch, J.*: Qualitative control with quantitative models. In Proc. 2nd International Conference on Intelligent Systems Engineering, S. 229–234, Hamburg-Harburg, 1994. IEE.
- [13] *Raisch, J.*: Analyse und Synthese einfacher hybrider Regelsysteme. at–Automatisierungstechnik 43:224–235, 1995.
- [14] *Raisch, J.*: Control of continuous plants by symbolic output feedback. In: *Antsaklis, P., Kohn, W., Nerode, A. und Sastry, S. (Hrsg.): Hybrid Systems II, Lecture Notes in Computer Science 999*, S. 370–390, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [15] *Schmitendorf, W. E. und Barmish, B. R.*: Null controllability of linear systems with constrained controls. SIAM J. Control and Optimization, 18:327–345, 1980.
- [16] *Sontag, E. D.*: *Mathematical Control Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

*Apparently there is no limit, Joe remarked.
Anything can be said in this place and it will be true
and will have to be believed.*

– Flann O'Brien: The Third Policeman

Kapitel 4

Schlußbetrachtung

In dieser Arbeit wurden zwei Ansätze für den Entwurf hybrider Regelsysteme vorgestellt. Einer der beiden Ansätze macht sich eine „diskrete Sichtweise“ des hybriden Problems zu eigen: Der kontinuierliche Anteil des Streckenmodells wird durch einen nichtdeterministischen Automaten approximiert; durch Verschalten dieser Approximation mit der diskreten Streckenkomponente erhält man eine diskrete Abstraktion der gesamten Strecke. In einem sich anschließenden zweiten Schritt entwirft man dann hierfür mit Methoden der ereignisdiskreten Regelungstheorie eine geeignete Rückführung. Das verwendete Approximationsverfahren gewährleistet die Einhaltung der sogenannten Reduktionsbedingung – alle Signalkombinationen, die das unterlagerte hybride System generieren kann, sind auch mit der berechneten diskreten Abstraktion kompatibel. Deshalb kann man garantieren, daß ein anhand des diskreten „Ersatzmodells“ ausgelegter Regler nicht nur die Abstraktion, sondern auch das ursprüngliche hybride Streckenmodell zur Einhaltung der Spezifikationen zwingt. Erweist sich die betrachtete Approximation als „zu grob“ (d.h. kein Regler kann sie zu wunschgemäßem Verhalten „bewegen“), so vergrößert man ihre Genauigkeit durch Verändern eines „Design-Parameters“. Dies wird allerdings mit einer erhöhten Komplexität des Automatenmodells erkaufte. Anschaulich läßt sich diese Vorgehensweise

folgendermaßen deuten: Man bewegt sich innerhalb einer vollständig geordneten Menge diskreter Approximationen vom obersten („größten“) Element bis zum ersten Modell, für das sich die Erfüllung der Spezifikationen noch erreichen läßt. Da die Komplexität des Reglers die der Strecke widerspiegelt, erhält man auf diese Art und Weise auch ein möglichst einfaches diskretes Rückführgesetz.

Ein zweiter, alternativer Ansatz basiert auf der „klassischen“ kontinuierlichen Regelungstheorie: Das kontinuierliche Modell (bzw. der kontinuierliche Modellanteil) der Regelstrecke wird für den Reglerentwurf beibehalten; man untersucht, wie sich der kontinuierliche Zustand durch diskretwertige (symbolische) Stelleingriffe beeinflussen läßt und welche Rückschlüsse auf den kontinuierlichen Zustand man aus symbolischen Meßsignalen ziehen kann. Auf der Grundlage dieser Steuerbarkeits-, Erreichbarkeits- und Beobachtbarkeitsanalyse läßt sich dann eine prädiktive Regelstrategie angeben.

Die erstgenannte Vorgehensweise bietet sich an, wenn Spezifikationen rein diskret formuliert werden. Dies geschieht i. a. auf übergeordneten Ebenen eines hierarchisch strukturierten Regelungssystems. Die dort verfolgten Ziele sind i. a. langfristiger, strategischer Natur und lassen sich deshalb meist auf wenig detaillierte (und damit diskrete) Weise angeben. Auch zur Umsetzung dieser Ziele bedient sich eine übergeordnete Entscheidungsebene oft nur diskreter (abstrahierter) Eingriffe und diskreter (abstrahierter) Meßinformation – das Umsetzen der Eingriffe erfolgt dann durch untergeordnete Ebenen, die auch Zugang zu detaillierter Information besitzen. Eine solche „freiwillige“ Beschränkung auf qualitative Meß- und Stellsignale „ruft“ geradezu nach einer entsprechenden Reduktion des der Auslegung der Regelstrategie zugrundeliegenden Streckenmodells.

Die zweite Vorgehensweise wird man dagegen wählen, wenn Spezifikationen mittels kontinuierlicher Größen formuliert werden. Dies deutet darauf hin, daß die Diskretwertigkeit der Stell- und Meßsignale ein unerwünschtes Phänomen darstellt, das den Charakter der betrachteten „klassischen“ Regelungsaufgabe zwar nicht grundlegend verändert, ihre Lösung aber beträchtlich erschwert.

Diese Zusammenfassung stellt den Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen in den Vordergrund. Tatsächlich existieren aber auch Berührungspunkte: Der „klassische“ Ansatz läßt sich als Grenzfall der diskreten Sichtweise deuten, zu dem man durch ständiges „Verfeinern“ der diskreten Approximationen gelangt. Dies zeigt sich besonders deutlich anhand der in Bild 2.29 auf Seite 56 dargestellten Modellhierarchie, in der das kontinuierli-

che System den untersten Platz einnimmt. Je „näher“ man dem kontinuierlichen Basismodell in dieser Hierarchie kommt, desto mehr Zustände enthalten die diskreten Abstraktionen und umso genauer läßt sich der momentane Zustand des kontinuierlichen Modells anhand der diskreten Abstraktionen und der diskreten Eingangs- und Meßsignale schätzen.

'Can you notify me of the meaning of a bulbul?'
 'A bulbul?'
 'What would you say a bulbul is?'
 This conundrum did not interest me but I
 pretended to rack my brains and screwed my face in
 perplexity until I felt it half the size it should be.
 'Not one of those ladies who take money?' I said.
 'No.'
 'Not the brass knobs on a German steam organ?'
 'Not the knobs.'
 'Nothing to do with the independence of America
 or suchlike?'
 'No.'

– Flann O'Brien: The Third Policeman

Symbolverzeichnis

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	3
\mathbb{R}^p	p-dimensionaler Euklidischer Raum	3
u	kontinuierlichwertiger Streckeneingang	3
u_d	diskretwertige Eingangsgröße	3
U_d	Wertebereich von u_d	3
w	kontinuierlichwertiger externer Streckeneingang	4
x	Zustand der kontinuierlichen Streckenkomponente	3
y	kontinuierlichwertige Meßgröße	3

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
\mathbb{U}	Grundmenge in der „behavioural“ Systemtheorie	11
\mathcal{B}	Verhalten eines Modells	11
\times	Kartesisches Produkt	12
\cup	Vereinigungsmenge	12
\mathbb{T}	Zeitachse	13
W	Signalraum	13
$W^{\mathbb{T}}$	Menge aller Funktionen $f : \mathbb{T} \rightarrow W$	14
\mathbb{R}^+	nichtnegative reelle Zahlen	13
\cap	Schnittmenge	17
Proj	natürliche Projektion	20
\emptyset	leere Menge	21
\mathcal{B}_{red}	Verhalten des reduzierten Strecken- modells	22
\mathcal{B}_R	Verhalten des Reglers	21
\mathcal{B}_{verb}	verbotenes Verhalten	21
\mathcal{B}_{spez}	Verhalten der Spezifikationen	21
B	Binärrelation	31
\leq	partielle Ordnung	31
\dot{A}	Äquivalenzrelation auf einer Menge M	32
M/\dot{A}	Quotientenmenge von M nach \dot{A}	32
$p_{\dot{A}}$	kanonische Abbildung von M auf M/\dot{A}	32
\mathcal{A}	Menge aller Äquivalenzrelationen auf M	34
f	Transitionsfunktion eines mengen- dynamischen Systems	35
q	Ausgangsfunktion eines mengen- dynamischen Systems	35
f	Transitionsfunktion des kontinuier- lichen Streckenanteils	40

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
q_z	Ausgangsfunktion des kontinuierlichen Streckenanteils	40
q_y	Messfunktion des kontinuierlichen Streckenanteils	40
ξ	Zustand des diskreten Streckenanteils	41
\tilde{u}	Eingang des diskreten Streckenanteils	41
δ	Transitionsfunktion des diskreten Streckenanteils	41
q_u	Ausgangsfunktion des diskreten Streckenanteils	41
N	Zahl der Elemente von U_d	41
K	Zahl der Elemente von Z_d	41
M	Zahl der Elemente von Y_d	41
x_d	Zustandsvariable der diskreten Abstraktion des kontinuierlichen Streckenanteils	42
X_d	Zustandsmenge der diskreten Abstraktion des kontinuierlichen Streckenanteils	42
N_v	Anzahl der Elemente in X_d	43
X_{d0}	Menge der möglichen Anfangszustände in X_d	43
$w^*(x_d^{(i)})$	Kette von $x_d^{(i)}$ zugeordneten Eingangssymbolen	43
$y^*(x_d^{(i)})$	Kette von $x_d^{(i)}$ zugeordneten Meßsymbolen	43
\mathcal{F}	„Vergessens-Operator“	44
$X(x_d^{(j)})$	mengenwertige Zustandsschätzung	51
2^{Z_d}	Potenzmenge von Z_d	55
A_v	diskrete Abstraktion des kontinuierlichen Streckenanteils	56
$\mathcal{B}(A_v)$	Verhalten von A_v	56
DA_v	diskrete Abstraktion des hybriden Basismodells	60

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
Δ	Transitionsmenge eines nicht-deterministischen Automaten	67
Q	Zustandsmenge eines nicht-deterministischen Automaten	67
Q_0	Menge der möglichen Anfangszustände eines nichtdeterministischen Automaten	67
Σ	Menge der Ereignisse (Transitions-symbole) eines nichtdeterministischen Automaten	67
e	Transitionsfunktion $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ eines nichtdeterministischen Automaten	67
\parallel	Synchrones Produkt	69
Q_i	Quantisierer für die i -te Meßgröße	100
$y_i^{(j)}$	Quantisierungsschwelle für die i -te Meßgröße	100
$\langle t_k^y, y_i^{(r)} \rangle$	Meßereignis	101
$\langle t_k^u, u_d^{(s)} \rangle$	Stellereignis	102
\mathcal{U}_d	Menge D-zulässiger Stellsignale	104
\mathcal{U}_c	Menge C-zulässiger Stellsignale	104
\mathcal{U}_d^T	Restriktion von \mathcal{U}_d auf das Zeitintervall $[0, T]$	105
\mathcal{U}_c^T	Restriktion von \mathcal{U}_c auf das Zeitintervall $[0, T]$	105
\mathcal{C}_d^T	Menge aller mittels D-zulässiger Stellsignale in Zeit T in den Ursprung steuerbarer Zustände	104
\mathcal{R}_d^T	Menge aller mittels D-zulässiger Stellsignale in Zeit T vom Ursprung erreichbarer Zustände	104
\mathcal{C}_d	Menge aller mittels D-zulässiger Stellsignale in beliebiger (endlicher) Zeit in den Ursprung steuerbarer Zustände	104

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
\mathcal{R}_d	Menge aller mittels D-zulässiger Stellsignale in beliebiger (endlicher) Zeit vom Ursprung erreichbarer Zustände	104
\mathbf{C}_c^T	Steuerbarkeitsoperator $\mathcal{U}_c^T \rightarrow \mathbb{R}^n$	106
\mathbf{C}_d^T	Steuerbarkeitsoperator $\mathcal{U}_d^T \rightarrow \mathbb{R}^n$	106
\mathbf{R}_c^T	Erreichbarkeitsoperator $\mathcal{U}_c^T \rightarrow \mathbb{R}^n$	106
\mathbf{R}_d^T	Erreichbarkeitsoperator $\mathcal{U}_d^T \rightarrow \mathbb{R}^n$	106
$\tilde{\mathcal{C}}_d$	maximaler in \mathcal{C}_d enthaltener Unter- raum	107
$\tilde{\mathcal{R}}_d$	maximaler in \mathcal{R}_d enthaltener Unter- raum	107